Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2004

Fernanda Maria Dias de Sousa

A transmissão de conceitos matemáticos para Portugal – Integrais e Funções Elípticas

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2004

Fernanda Maria Dias de Sousa

A transmissão de conceitos matemáticos para Portugal – Integrais e Funções Elípticas

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática, realizada sob a orientação científica do Professor Doutor Helmuth Robert Malonek, Professor Catedrático do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

o júri

presidente

Doutor Vasile Staicu
Professor Catedrático da Universidade de Aveiro

Doutor Carlos Manuel Monteiro Correia de Sá
Professor Auxiliar da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Doutor Helmuth Robert Malonek
Professor Catedrático da Universidade de Aveiro (Orientador)

agradecimentos

Ao Professor Doutor Helmuth Robert Malonek pelo apoio constante prestado ao longo de toda a elaboração da tese.
Aos meus Pais, que estiveram presentes quando eu deles mais precisei e, em particular à minha Mãe por todo o carinho e apoio que me deu.
Às minhas amigas Eulália Nunes e Sandra Gamboa.
Às minhas amigas e colegas de mestrado Ana Paulino e Isabel Tavares.
Aos funcionários da biblioteca do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra.

Resumo

Esta tese considera a transmissão de conceitos matemáticos para Portugal no século XIX, particularmente no campo dos Integrais Elípticos e das Funções Elípticas, tal como foi realizado no trabalho de António Zeferino Cândido.

Depois de uma introdução histórica geral ao assunto no capítulo 1, o capítulo 2 estuda a vida de António Zeferino Cândido da Piedade. Ele foi, talvez, o primeiro matemático português a publicar uma tese sobre este assunto.

A parte principal, isto é, o capítulo 3, é dedicada à análise do seu trabalho "Integraes e Funcções Ellipticas". Mostra detalhes da sua abordagem baseada, não só, no livro dos autores Franceses Briot e Bouquet, mas também do autor alemão Schloemilch, o que reflecte as mudanças que ocorreram naquela época na liderança matemática na Europa.

ABSTRACT

This thesis considers the transmission of mathematical concepts to Portugal in the 19th century, particularly in the field of Elliptic Integrals and Elliptic Functions, as it has been realized in the work of António Zeferino Cândido.
After a general historical introduction to the subject in the first chapter, the second chapter studied the life of António Zeferino Cândido da Piedade. He was, maybe, the first Portuguese mathematician who published a thesis about this subject.
The main part, i.e. the third chapter, is dedicated to the analysis of his work “Integraes e Funcções Ellipticas”. It shows the details of his approach based on the books of the French authors de Briot e Bouquet, but also of German author Schloemilch, which reflects the changes that occurred that time in the mathematical leadership in Europe.

Índice

Introdução

> "O século XIX, mais do que qualquer período precedente, mereceu ser conhecido como Idade Áurea da Matemática. O que se acrescentou ao assunto durante esses cem anos supera de longe, tanto em quantidade quanto em qualidade, a produtividade total combinada de todas as épocas precedentes." CARL B. BOYER.

Esta afirmação vem corroborar a ideia de que o século XIX assinala uma nova fase na matemática, período das Matemáticas Modernas, que poderá mesmo constituir um período à parte, na história geral da Matemática.

Este progresso, da matemática, começou a verificar-se no início do século XIX, com os trabalhos de Abel[1] (1802-1829) e Galois[2] (1811-1832) sobre resolução de equações algébricas com radicais, bem como com a criação e desenvolvimento da teoria dos grupos de Galois[3], que contribuíram de forma bastante significativa para o desenvolvimento da álgebra.

Outro aspecto revolucionário foi o que surgiu no campo das ciências geométricas. A descoberta, nos anos 20 e 30, por Lobachevsky[4] (1793-1856) e também por Bolyai[5] (1802-1860) e Gauss[6] (1777-1855) dos casos fundamentais da geometria hiperbólica e não euclidiana, bem como a procura da sua interpretação por volta dos anos 60 e 70, permitiram essa revolução.

O sistema de disciplinas, que formam parte da análise matemática, sofrera nos seus fundamentos uma reconstrução profunda, sobretudo, na base da teoria dos limites e na teoria dos números reais.

Antes, porém, de passar a um estudo mais detalhado de um campo particular da análise matemática, Integrais e Funções Elípticas, mencionamos aqui três aspectos fundamentais da evolução da ciência matemática, do séc. XIX.

Em primeiro lugar, um dos aspectos a referir, é a extensão dos conteúdos matemáticos, que sofre uma grande ampliação, devida ao facto de em toda a ciência matemática começar a haver um processo de generalização dos conceitos fundamentais, e uma substituição de alguns conceitos por outros mais gerais. Todo este processo ocorria como consequência das ciências que lhe estavam ligadas.

O segundo aspecto característico das matemáticas do século XIX está, em parte, ligado à investigação, surgida com a exigência da teoria matemática. Houve naquela época muitos estudiosos que reflectiram de forma a fundamentar a matemática. Embora estes esforços de fundamentar a matemática já tenham surgido no século XVIII, eles tomam agora outra direcção. Neles se produziu uma reflexão crítica dos conceitos primários (definições) e das afirmações (axiomas), tendo havido a preocupação da construção de um sistema rigoroso de definições e demonstrações; realizou-se uma revisão crítica dos métodos lógicos e das demonstrações matemáticas.

Estas investigações e as exigências do rigor matemático levam à criação de novas teorias matemáticas.

Além da complicação da própria estrutura matemática, a relação desta com a prática tornou-se muito complexa, não aparecendo os resultados imediatamente, mas apenas depois de alguns anos. E foi essencialmente em finais do século XIX que um padrão estável, do rigor lógico matemático, se formou.

A terceira particularidade característica do desenvolvimento das matemáticas deste século é a ampliação considerável do seu campo de aplicação, no fundamental, condicionado por um aumento das possibilidades da aplicação da análise matemática. Nas ciências exactas, tais como a mecânica e a óptica, incluem-se os problemas dos fenómenos termodinâmicos e electromagnéticos. Cresceram também, de uma forma brusca, as exigências matemáticas da técnica: a balística, a construção da maquinaria entre outros.

No decorrer deste trabalho, vai ser feita a análise de um campo da matemática que teve grande progresso neste período, e cujo desenvolvimento está marcado pelas mudanças matemáticas, ocorridas neste século, algumas das quais ainda se mantêm nos nossos dias. Passemos então ao estudo de um campo particular da análise *Integrais e Funções Elípticas*, que teve o seu apogeu no século XIX. Para esse efeito propomo-nos analisar a obra de António Zeferino Cândido da Piedade que foca este assunto.

Procuraremos ver de que forma é que A. Zeferino[7] contribuiu para a divulgação daquela teoria, averiguar se houve alguma hipótese de inovação ou apenas transmissão de conceitos.

Para que haja um melhor enquadramento, antes de analisarmos a vida e obra de A. Zeferino, será feita uma abordagem histórica sobre a teoria dos Integrais e Funções Elípticas.

O trabalho está dividido em três capítulos. O primeiro, *Integrais e Funções Elípticas*, aborda os aspectos históricos mais relevantes. O segundo, *António Zeferino Cândido da Piedade*, contém factos biográficos e descreve a vida universitária daquela época. Finalmente, o terceiro capítulo, *A Dissertação de António Zeferino Cândido da Piedade*, é dedicado à análise da obra de António Zeferino. Do presente trabalho ainda faz parte um apêndice onde podemos ver exemplos do uso das tábuas de Legendre (1752-1833), bem como anexos de documentos complementares ao texto.

Ao longo deste trabalho foram colocadas notas, no final de cada capítulo, para que houvesse uma melhor compreensão.

Todas as definições, teoremas e figuras têm um número que indica o capítulo e a posição no mesmo. No apêndice a numeração tem o prefixo A, sendo os anexos identificados em numeração romana.

As notações e simbolismos usados por A. Zeferino são de fácil compreensão e portanto foram mantidas, à excepção daquelas que se afastam das de hoje em dia. No entanto, para estas situações foi feita nota no final do capítulo.

Na análise da obra de A. Zeferino (Capítulo 3) far-se-á, de um modo superficial, uma comparação com o trabalho de Schloemilch (1823-1901) *"Théorie des Intégrales et des Fonctions Elliptiques"*, traduzido do alemão por Joseph Graindorge, e que parece ter servido de inspiração a Zeferino. Assim, após cada capítulo analisado da obra de A. Zeferino, surgirão comparações e conclusões, relativas ao trabalho de Schloemilch, para que se possa perceber o grau de aproximação da obra de A. Zeferino com a daquele autor.

Notas

[1] Niels Henrik Abel nasceu em Finnöy na Noruega a 5 de Agosto de 1802 e faleceu a 6 de Abril de 1829 em Oslo. Enquanto estudante pensou, durante algum tempo, que tinha resolvido a equação do quinto grau corrigindo-se, a si próprio, num artigo publicado em 1824. Neste texto Abel provou a impossibilidade de resolver a equação geral do quinto grau por meio de radicais.

Abel escreveu vários artigos que contêm trabalhos sobre a convergência de séries, «integrais abelianos» e Funções Elípticas.

As suas memórias, sobre Funções Elípticas, foram publicadas no "Journal Crelle" (periódico alemão, especificamente matemático – *Journal für die reine und angewandte Mathematik*). O primeiro volume deste jornal continha nada menos do que cinco artigos de Abel aparecendo, no segundo volume, em 1827, a primeira parte das *"Recherches sur les fonctions elliptiques"*, com a qual começa a teoria das funções duplamente periódicas. (ver [**A15**])

[2] Evariste Galois nasceu a 25 de Outubro de 1811 em Reine de Bourg, França e faleceu em Paris a 31 de Maio de 1832. A maior parte dos seus trabalhos só foi publicada depois da sua morte. No entanto, em Abril de 1829 viu o seu primeiro trabalho ser publicado no "Annales de mathématiques". Passado um ano, publicou mais três trabalhos no *"Bulletin Férussac"*.

Galois foi morto num duelo. Na véspera escreveu a um amigo um resumo das suas descobertas no campo da teoria das equações. Esta carta foi publicada, a seu pedido, na "Revue Encyclopedique".

Em 1846, Liouville (1809-1899) publicou a maior parte dos trabalhos de Galois no "Journal de Mathématiques", altura em que Cauchy (1789-1857) já tinha começado a publicar sobre a teoria de grupos.

Galois também tinha ideias sobre os integrais de funções algébricas de uma variável que, nos nossos dias designamos de «integrais abelianos». Sobre este assunto, verifica-se que as suas ideias já estavam muito próximas das de Riemann (1826-1866).

Galois, depois de ter lido os trabalhos de Abel (1802-1829) e Jacobi (1804-1851), trabalhou na teoria das Funções Elípticas e dos integrais abelianos. Ainda inspirado na prova de Abel, da irresolubilidade por radicais da equação quíntica, Galois descobriu que uma equação algébrica é resolúvel por radicais se e só se o seu grupo é resolúvel. (ver [**A15**])

[3] A Teoria de Grupos foi desenvolvida por Galois (1811-1832) e surgiu com a resolução de equações. Os métodos gerais, aceitáveis naquela época, para a resolução de equações deveriam basear-se unicamente nas operações da adição, subtracção, multiplicação, divisão e extracção de raízes, e tinham de ser aplicáveis para uma equação de qualquer grau. Galois descobre que a partir do caso n=5, tal método não era possível. Assim ele chega à conclusão que: Cada equação de grau n tem associado um grupo S(n) ou algum subgrupo de S(n); todo o grupo associado a uma equação chama-se Grupo de Galois da equação.

À teoria de Galois estão ainda relacionados problemas como, a trissecção do ângulo, a duplicação do cubo e a solução da equação cúbica e biquadrática, assim como, a resolução de uma equação algébrica de qualquer grau.

[4] Nicolai Ivanovitch Lobachevsky nasceu a 2 de Novembro de 1793 em Makarief, Rússia e faleceu em Kazan em 1856. Lobachevsky é considerado o "Copérnico da geometria", mostrando que a geometria Euclidiana não era a verdade absoluta que se supunha ser. Professor em Kazan, em 1826, deu lições sobre o axioma das paralelas de Euclides. O seu primeiro livro apareceu em 1829-30 e foi escrito em russo, do qual poucas pessoas tiveram conhecimento. Entre 1835 e 1855 redigiu três exposições completas da nova geometria. Em 1835-1838 *"Novos fundamentos da Geometria"* apareceu em russo. Em 1840 publicou, em alemão, *"Investigações Geométricas sobre a teoria das Paralelas"*. Passados 15 anos, o seu último livro, *"Pangeometria"* foi publicado simultaneamente em francês e russo. Todas estas publicações foram traduzidas noutras línguas.

Lobachevsky foi conhecido como o "Matemático herege". (ver [**A15**])

[5] Janos Bolyai nasceu a 15 de Dezembro de 1802 em Kolozsvár, Hungria e faleceu a 27 de Janeiro de 1860 em Marosvásárhely, Hungria. Bolyai escreveu as suas reflexões, que foram publicadas em 1832, como apêndice a um livro do pai, Farkas Bolyai (1775-1856), com o título: *"Appendix scientiam spatié absolute veram exhibens"*. Embora não tivesse grande reconhecimento matemático, continuou a escrever, por exemplo, sobre uma representação geométrica dos imaginários. Bolyai desenvolveu um rigoroso conceito geométrico dos números complexos, como pares ordenados de números reais. Refira-se que Hamilton (1788-1856) em "Theory of Algebraic Couples" (1835) também construiu uma álgebra rigorosa dos números complexos, concebendo um número complexo como um par de números.

Embora os artigos de Bolyai e de Lobachevsky (1793-1856) fossem diferentes, as suas teorias eram muito semelhantes.

Ainda que tenha publicado pouca coisa, Bolyai deixou mais de 20000 páginas de trabalhos matemáticos. Estes trabalhos podem ser encontrados numa "Teleki – Library" em Tirgu – Mures. (ver [**A13**])

[6] Karl Friedrich Gauss nasceu em Brunswick a 23 de Abril de 1777 e morreu a 23 de Fevereiro de 1855 em Göttingen. O jovem génio estudou em Göttingen e em 1799 obteve o grau de doutor, com uma tese dedicada à demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra. Desde 1807 até à sua morte, trabalhou como director do observatório astronómico.

Os diários de Gauss revelam que desde cedo começou a fazer descobertas surpreendentes. Em 1795 descobriu, independentemente de Euler (1707-1783), a lei da reciprocidade quadrática na teoria de números. Muitas das suas descobertas, sobre a teoria de números, foram feitas enquanto estudante. Em 1801 aparece *"Disquisitiones arithmeticae"*, onde podemos encontrar todos os grandes trabalhos sobre a teoria de números entre outros assuntos. Oito anos mais tarde, publica *"Theoria motus corporum coelestium"*. Em 1825 e 1835 surge o trabalho sobre resíduos biquadráticos. Este era uma continuação da teoria dos resíduos quadráticos, mas que contava com um método novo, a teoria dos números complexos.

As suas descobertas no campo da electricidade e do magnetismo datam de 1830. No campo do magnetismo publica, em 1833, *"Intensitas Vis Magneticae Terrestres ad Mensuram Absolutam Revocata"* e em 1840, no campo da óptica, publica *"Dioptrische Untersuchungen"*.

Nos seus papéis datados de 1843, *"Über Gegenstände der höhern Geodäsie"*, pode encontrar-se algo sobre geodesia. (ver [**A15**])

[7] No decorrer deste trabalho sempre que apareça A. Zeferino refere-se a, António Zeferino Cândido da Piedade.

Capítulo 1

Integrais e Funções Elípticas

Neste capítulo faz-se uma abordagem à história dos Integrais e Funções Elípticas apresentando uma breve introdução seguida de um sub capítulo dedicado às Definições e Notas Históricas, com o qual o leitor poderá ficar familiarizado com a evolução desta teoria.

1.1 Observações Preliminares

A teoria das Funções Elípticas, proveniente de problemas colocados desde o século XVIII, relativos à rectificação de curvas, teve um papel fundamental nas investigações matemáticas dos últimos séculos. Com a sua extensão aos integrais abelianos[1], ela teve uma grande influência no desenvolvimento da Geometria algébrica, e em outras teorias importantes que dela resultam: a teoria das funções theta[2], as variedades abelianas[3], funções modulares[4] e automórficas[5].

As inúmeras aplicações dos Integrais Elípticos podem ser encontradas depois do século XVIII; nas aplicações à mecânica[6], nas aplicações à teoria do calor, à teoria do potencial[7] e sua condução eléctrica, à geodesia e à descoberta da superfície mínima[8].

A área matemática que está mais ligada às Funções Elípticas é a teoria de números. Este é o domínio mais rico de aplicação da teoria das Funções Elípticas e os primeiros exemplos devem-se a Jacobi (1804-1851) quando, em 1828, calculou o número $r_k(n)$ de decomposições de um inteiro n como soma de k quadrados para k=2,4,6 e 8.

1

Em termos gerais poder-se-á dizer que as principais articulações da história das Funções Elípticas até ao final do século XIX são as seguintes: em 1751, a leitura por parte de Euler (1707-1783) dos trabalhos de Fagnano (1682-1766), seguido da descoberta dos Integrais Elípticos[9]; em 1827, as primeiras publicações de Abel (1802-1829) e Jacobi, início da teoria das Funções Elípticas, propriamente dita. No entanto não poderão deixar de ser referidos outros nomes que de uma forma ou outra contribuíram para o desenvolvimento desta teoria, sendo de referir nomes tais como Jacob Bernoulli (1654-1705), MacLaurin[10] (1698-1746), Gauss (1777-1855), Lagrange (1736-1813), entre outros. Estes nomes poderão ser encontrados no desenvolvimento da segunda parte deste capítulo – Definições. Notas Históricas.

1.2 Definições. Notas Históricas.

Integrais Elípticos são integrais da forma $\int R(x, \sqrt{P(x)})dx$ onde $R(x, y)$ é uma função racional de duas variáveis e $P(x)$ é um polinómio de grau 3 ou 4 sem raízes múltiplas. O seu nome advém do facto da rectificação do arco de uma elipse ter levado a um integral deste tipo. Muitos dos integrais surgem da tentativa de resolver problemas mecânicos[11], bem como em questões de geometria[12].

É importante referir que estes tipos de questões já tinham sido colocadas por matemáticos de século XVII[13], no entanto nessa altura os Integrais Elípticos eram intratáveis[14].

Em 1655 Wallis[15] (1616-1703) tentou calcular a medida de comprimento do arco de uma elipse, tendo como elemento de arco $ds = \left(dx^2 + dy^2\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{a^2 - ex^2}{a^2 - x^2}}dx$ com $e = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ (a e b são os semi – eixos da elipse).

Em 1679 quando Jacob Bernoulli[16] se propôs encontrar a medida de comprimento do arco de uma espiral, encontra um exemplo de um Integral Elíptico. Mais, o mesmo Bernoulli em 1694 dá um passo importante na teoria dos Integrais Elípticos, com o estudo da Lemniscata, a curva que recebe o seu nome "Lemniscata de Bernoulli" e é dada pela equação polar $\rho^2 = a\cos 2\theta$ [17], a qual tem a seguinte representação gráfica:

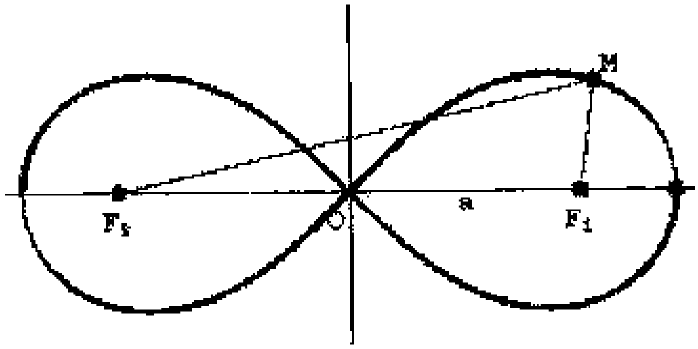


Figura 1.1: Lemniscata de Bernoulli, com a=3

Ainda no ano de 1694 Bernoulli considera o Integral Elíptico $\int \frac{t^2}{\sqrt{(1-t^2)}}dt$, e chega à conclusão de que este não pode ser expresso em termos de funções $\sin$; $\exp$; $\sin^{-1}$.

Lambert[18] (1728-1777) em 1772 chega aos desenvolvimentos trigonométricos[19] mais rapidamente convergentes a partir da fórmula $ds = a\sqrt{1-e\sin^2\varphi}\,d\varphi$, que é obtida de $ds = \sqrt{\frac{a^2-ex^2}{a^2-x^2}}dx$ feita a mudança de variável $x = a\sin\varphi$.

Euler[20] apresenta o desenvolvimento em série, do cálculo do elemento de área de um cone oblíquo de base circular, o qual é dado por $ds = {}^{c}\!/_{2}\ \sqrt{a^2+(c+b\cos\varphi)^2}$, onde a é a altura, b a distância do centro do círculo da base à projecção do cimo da base e c o raio do círculo da base.

Lagrange[21] estudou sistematicamente os integrais $\int \frac{M(x)}{\sqrt{(1\pm p^2x^2)(1\pm q^2x^2)}}dx$, com M racional, num artigo importante *"Sur une nouvelle méthode de calcul intégral"* (1783), onde calcula o seu desenvolvimento em série. O desenvolvimento em série

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\cos^2\varphi}}=\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1\cdot 3\cdot\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots .2n}\right)^2 k^{2n}$$

permitiu a Gauss[22] em 1800, demonstrar uma fórmula, que ele descobriu pelo cálculo numérico, no caso particular de $k=\sqrt{\frac{1}{2}}$ e encontrar desta forma a ligação[23] entre os Integrais Elípticos e a teoria da Média Aritmético – Geométrica $M(a,b)$ de dois números a e b tais que $a>b>0$. A média aritmético – geométrica define-se da seguinte forma: fixados dois números reais a e b tais que $0<b<a$, sejam (a_n) e (b_n) as sucessões $a_1=a$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n b_n}$ e $b_1=b$, $b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$ (qualquer termo da sucessão (a_n), exceptuando o primeiro, é a média geométrica dos dois termos de ordem imediatamente anterior das sucessões (a_n) e (b_n) e todo o termo da sucessão (b_n) de ordem superior a um, é a média aritmética dos termos de ordem imediatamente anterior das mesmas sucessões). Prova-se que as sucessões (a_n) e (b_n) são convergentes para o mesmo limite.

Em 1716 Fagnano[24] apresentou um trabalho o qual foi sugestivo para Euler, que o usou na prova, em 1761, do teorema da adição para Integrais Elípticos, teorema de importância tal que foi utilizado pelos seus contemporâneos e sucessores. Em 1752, numa exposição feita à Academia de Berlim, Euler apresentou os trabalhos deste autor, limitando-se, no entanto, a completá-los.

De facto, Fagnano fez um trabalho notável, no campo da adição de Integrais Elípticos, quando em 1716 se interessou pela Lemniscata de Bernoulli, de equação polar $\rho^2=a\cos 2\theta$ (ver página anterior), e cujo elemento de arco é dado por: $ds=\frac{a^2 d\varphi}{\sqrt{a^4-\rho^4}}$,

sendo $\frac{a^2 dt}{2\sqrt{t(a^4-t^2)}}$ se $t=\rho^2$. Uma integração por partes permite exprimir o arco da Lemniscata como soma de um arco de elipse com um arco de uma hipérbole equilátera e com uma expressão algébrica[25]. Fagnano observa além disso que a transformação $t\mapsto t'$ definida por $(t+a^2)(t'+a^2)=2a^4$, sendo $\rho^2\rho'^2+a^2(\rho^2+\rho'^2)-a^4=0$ (ρ,ρ' raios vectores) dá $ds+ds'=0$, por conseguinte os arcos correspondentes sobre a Lemniscata têm a mesma medida de comprimento. Fazendo $\rho = \rho'$ e considerando as seguintes mudanças de variáveis $\rho^2 = \dfrac{2u^2}{1+u^4}$ e $u^2 = \dfrac{2v^2}{1-v^4}$ Fagnano encontra $\dfrac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^4}} = \pm \dfrac{du\sqrt{2}}{\sqrt{1+u^4}} = \pm \dfrac{2dv}{\sqrt{1-v^4}}$, o que lhe permite duplicar o arco de Lemniscata ou dividir por dois.

Desde 1752, Euler tinha interpretado a relação $\rho^2\rho'^2 + a^2(\rho^2 + \rho'^2) - a^4 = 0$ como um integral algébrico particular da equação diferencial $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \pm \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$ (onde considerou $a = 1$ e x e y em vez de ρ e ρ'), chegando ao integral geral de equação: $x^2 + y^2 = c^2 + 2xy\sqrt{1-c^4} - c^2x^2y^2$ (c uma constante qualquer).

Euler, em 1757, chega ao integral geral de

$$\frac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{P(y)}}$$ [26],

onde P é um polinómio de grau 4, da forma $f(x,y) = 0$.

Assim, quando P é par, f não contém monómios simétricos em x e y, donde se tira do integral geral: $y = A\dfrac{x\sqrt{P(c)} + c\sqrt{P(x)}}{A - Ec^2x^2}$ (c constante de integração) designando por A e E os coeficientes respectivos de $x^0 = 1$ e de x^4 em $P(x)$. Tendo em consideração tudo isto, ele chega à seguinte conclusão relativamente ao integral $\int \dfrac{dx}{\sqrt{P(x)}}$: o integral entre 0 e y é a soma dos integrais nos intervalos $[0, x]$ e $[0, c]$.

Em 1766, Lagrange consegue encontrar um método mais directo para a adição de integrais. Ele introduz uma variável t tal que $dt = \dfrac{dx}{\sqrt{P(x)}} = \dfrac{dy}{\sqrt{P(y)}}$ e coloca ainda, $p = x + y$ e $q = x - y$ donde obtém:

$$q\frac{d^2p}{dt^2} - \frac{dp}{dt}\frac{dq}{dt} = q^3\left(\frac{1}{2}D + Ep\right),$$ onde D e E são os coeficientes de x^3 e x^4, em $P(x)$, respectivamente. Obtém desta forma o integral geral, da seguinte:

$\frac{\sqrt{P(x)}+\sqrt{P(y)}}{x-y}=\sqrt{G+D(x+y)+E(x+y)^2}$ onde G é a constante de integração.

Em 1829, Jacobi[27] deu uma interpretação geométrica do teorema da adição de Euler, em ligação com os polígonos de Poncelet[28]. O resultado obtido foi análogo ao que Lagrange[29] apresenta em *"Théorie des fonctions analytiques"* (1797), quando faz a aplicação do seu método de integração à equação $\frac{dz}{\sqrt{1-k^2\sin^2 z}}=\frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$, para a qual consegue o integral: $\cos z\cos u+\cos M\sin z\sin u=\cos m$, onde m é a constante de integração e $\sin M=k\sin m$..

Ainda influenciado pela origem geométrica dos Integrais Elípticos, Euler, em 1759, retoma certos aspectos como a rectificação da elipse e da hipérbole[30]. Euler interessou-se, principalmente, nos integrais do tipo $\int\sqrt{\frac{f+gx^2}{h+kx^2}}dx$; para diversas mudanças de variável, reduz a três casos, onde o cálculo se faz respectivamente por um arco de cónica, a soma de um arco de cónica e de uma função algébrica e a soma de dois arcos de cónica e de uma função algébrica.

Em 1765, Euler apercebeu-se que fazendo uma mudança de variável através de uma transformação homográfica eliminaria as potências ímpares do polinómio $P(x)$, em $\frac{dx}{\sqrt{P(x)}}$. Numa outra direcção, Euler descobre, perto do fim da sua vida (1775 – 1782), como determinar curvas algébricas, dado o elemento de arco[31].

Longos tempos passaram para interpretar os Integrais Elípticos no que se refere à rectificação de certas curvas.

Lagrange foi o primeiro a considerar os Integrais Elípticos na forma mais comum[32] (1784), limitando-se no entanto ao caso onde os coeficientes são reais. Legendre[33] (1752-1833) que teve em vista a construção de tábuas[34] dos Integrais Elípticos, interpreta a redução destes integrais a um número mínimo de formas canónicas as quais apresenta em *"Mémoire sur les transcendantes ellíptiques"* (1793). Depois de várias transformações, remete os Integrais Elípticos a três formas canónicas:

O integral de 1ª espécie:

$$F(\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}$$

o integral de 2ª espécie:

$$E(\varphi)=\int_0^{\varphi}\Delta(\varphi)d\varphi$$ [35]

e o integral de 3ª espécie:

$$\Pi(\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta\varphi} \qquad \text{com} \quad \Delta(\varphi)=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$$

que substituindo $x=\sin\varphi$ vem, respectivamente,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,; \qquad \int\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}dx \ \text{ e } \ \int\frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,.$$

Legendre chama φ à amplitude do integral, k ao seu módulo e para o integral de terceira espécie, n o parâmetro. Colocando $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ele fala de integral completo, que designa da seguinte forma: $F^1=F\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $E^1=E\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e $\Pi^1=\Pi\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Encontra ainda certas relações entre os integrais completos[36].

Legendre obteve as equações diferenciais lineares de 2ª ordem para os Integrais Elípticos de 2ª espécie $E(\varphi,k)=\int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$ e de 1ª espécie $F(\varphi,K)=\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$. Reconhece então que a equação de E é a equação Euler, $k(k^2-1)\frac{d^2E}{dk^2}+(k^2-1)\frac{dE}{dk}-kE=0$, a qual foi encontrada em 1733 quando este fez o desenvolvimento em série do integral E, tendo $k=\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)^{1/2}$. Sendo a equação diferencial de 2ª ordem relativa ao integral de 1ª espécie a seguinte: $k(k^2-1)\frac{d^2F}{dk^2}+(3k^2-1)\frac{dF}{dk}+kF=0$[37].

Em 1840, Liouville[38] (1809-1882) mostrou que $F, E, \frac{dF}{dk}$ e $\frac{dE}{dk}$ são as funções transcendentes não «elementares» de «módulo k».

Os resultados de Legendre estão reunidos nos seus *"Exercíces de calcul intégral"* (1811) e no seu *"Traité des fonctions elliptiques"* (1825); Abel[39] e Jacobi, os fundadores da teoria das Funções Elípticas, iniciam o seu estudo com base no primeiro destes dois livros.

O estudo exaustivo da redução dos Integrais Elípticos é feito na memória *póstuma* de Abel *"Theorie des transcendantes ellíptiques"* (composta entre 1823 e 1825).

As funções que se obtêm por inversão dos Integrais Elípticos designam-se por ***Funções Elípticas*** e as curvas cuja parametrização é feita à custa destas funções designam-se por ***Curvas Elípticas***[40].

A ideia de inverter Integrais Elípticos surgiu com Gauss, Abel e Jacobi. Antes de Abel nada foi publicado acerca das Funções Elípticas, nada existiu fora dos papéis de Gauss, até Abel as ter descoberto.

Nos papéis de Gauss, os quais foram publicados após a sua morte, foram encontradas algumas relações nas funções recíprocas dos Integrais Elípticos: a inversão de $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ em 1796, seguido de $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ em 1797, conduzira à definição de funções Leminiscatas[41], as quais estão ligadas pela relação de Fagnano, $sl^2u + cl^2u + sl^2ucl^2u = 1$.

Em 1799, Gauss estendeu os seus estudos ao integral $u = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1+u^2\sin^2\varphi}}$ [42], donde definiu a função recíproca $u \mapsto Su = \sin\varphi$ para todo $u \in \mathbb{C}$, a qual tem um período real e um imaginário puro.

Mas, foi Abel que revolucionou o assunto e ao mesmo tempo abriu as portas da análise do século XIX, em 1827, com uma simples nota: ***"Eu proponho considerar as funções inversas"***[43].

Embora Abel tenha seguido um caminho análogo ao de Gauss, Abel desenvolveu esta teoria de uma forma mais completa e sistemática. Mais ainda, Abel teve o privilégio de ser o primeiro a publicar algo sobre o assunto.

A primeira descoberta "capital" de Abel consiste em novas funções tendo estas dupla periodicidade: $\phi(x+p_1)=\phi(x)$, $\phi(x+p_2)=\phi(x)$, onde p_1 e p_2 são constantes cuja razão não é um número real. Assim a Função Elíptica é duplamente periódica.

Nas suas *"Recherches sur les fonctions elliptiques"* (1827), Abel começou por considerar os Integrais Elípticos

$$\alpha=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}$$

como primeiro objecto de investigação e através da função $x=\phi(\alpha)$ inverte este integral introduzindo duas funções adicionais $f(\alpha)=\sqrt{1-c^2\phi^2(\alpha)}$ e $F(\alpha)=\sqrt{1+e^2\phi^2(\alpha)}$, as quais são Funções Elípticas. Usando o teorema da adição de Euler, conclui que os valores de $\phi(\alpha+\beta)$, $f(\alpha+\beta)$ e $F(\alpha+\beta)$ podem ser expressos em termos dos valores de α e β destas mesmas funções.

Depois de definir a função ϕ para valores, imaginários puros, do argumento $\phi(\beta i)$, invertendo o respectivo integral, substituindo x por xi e consequentemente definindo $f(\beta i)$ e $F(\beta i)$, Abel usou o teorema da adição para estender a definição às três Funções Elípticas no caso do argumento ser um número complexo, onde a dupla periodicidade aparece de imediato, sendo os períodos fundamentais 2ω e $2\varpi i$, calculados da seguinte forma:

$$2\omega=4\int_0^{1/c}\frac{dx}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}} \quad \text{e} \quad 2\varpi i=4\int_0^{1/e}\frac{dx}{\sqrt{(1+c^2x^2)(1-e^2x^2)}}.$$

Ainda a partir do teorema da adição, Abel encontrou as fórmulas para a multiplicação dos argumentos, expressando $\phi(n,\alpha)$; $f(n,\alpha)$ e $F(n,\alpha)$ racionalmente em termos de $x=\phi(\alpha)$, $y=f(\alpha)$ e $z=F(\alpha)$.

Jacobi, alguns anos depois de Abel ter morrido, caracteriza a inversão como um progresso secreto das matemáticas: ***"Deve-se sempre Inverter"***[44]. Talvez inspirado no artigo de Abel, inverteu o Integral Elíptico de 1ª espécie

$$u=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$ colocando $\varphi=amu$ (amplitude de u), sendo k (0<k<1) o outro parâmetro, chamado módulo. Substituindo $x=\sin\varphi$, obtém

$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$ para x função de u – o inverso do integral de 1ª espécie será $x = \sin amu$. Através desta, definiu outras duas: $\cos amu = \sqrt{1-\sin^2 amu}$ e $\Delta amu = \sqrt{1-k^2 \sin^2 amu}$.

A dupla periodicidade, os zeros e os pólos foram demonstrados seguindo o mesmo caminho que Abel e Gauss. Por exemplo, ele chega à conclusão que os períodos fundamentais do $\sin amu$ são:

$$4K = 4\int_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \text{ e } 2iK' = 2i\int_0^1 \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}$$

onde $k' = \sqrt{1-k^2}$ é o módulo complementar. Para além deste aspecto Jacobi estuda ainda o problema da transformação nas Funções Elípticas, multiplicação e divisão dos argumentos, a relação entre os integrais de 2ª e 3ª espécie, entre outros assuntos. Ele usa ainda as funções theta como funções auxiliares.

Podemos ainda ver as Funções Elípticas de Jacobi expressas em termos das funções theta[45]:

$$\sin amu = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{H(u)}{\Theta(u)},\ \cos amu = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{H(u+K)}{\Theta(u)} \text{ e } \Delta amu = \sqrt{k'}\frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)}.$$

Refira-se que Jacobi construiu as Funções Elípticas de um modo diferente do de Abel, a partir das séries $\Theta(K) = 1+2\sum_{n\geq 1} q^{n^2}$ e $H(K) = 2\sum_{n\geq 0} q^{(n+(1/2))^2}$ onde q é um polinómio de grau dois de índice n.

As funções theta podem ser representadas em termos das séries trigonométricas convergentes:

$$\Theta(u) = 1-2q\cos 2v + 2q^4\cos 4v - 2q^9\cos 6v + ...$$

$$H(u) = 2q^{1/4}\sin v - 2q^{9/4}\sin 3v + 2q^{25/4}\sin 5v - ...$$

onde $v = \frac{\pi u}{2K}$ e $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$. Estas funções são inteiras e periódicas de período $2K$ e $4K$ para $\Theta(u)$ e $H(u)$ respectivamente.

Refira-se, no entanto, que os quocientes:

$$\frac{H(u)}{\Theta(u)},\ \frac{H(u+K)}{\Theta(u)} \text{ e } \frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)}$$

são funções duplamente periódicas.

Jacobi encontrou ainda um prolongamento das suas Funções Elípticas com valores complexos da variável.

O clássico de Jacobi *"Fundamenta nova theorie functionum ellipticarum"* publicada em 1829, ano em que Abel faleceu, tirou partido das consequências da inversão e da dupla periodicidade fazendo novas funções, mais acessíveis ao público matemático.

Por causa deste trabalho, Jacobi compartilhou com Abel a criação das Funções Elípticas. As funções theta, também estão desenvolvidas neste trabalho, e serviram algum tempo mais tarde para construir as Funções Elípticas. Poderá então concluir-se que os trabalhos de Abel e Jacobi tiveram um papel relevante na nova matemática do século XIX. Assim podemos mencionar três detalhes importantes, os quais se podem considerar extraordinários.

O primeiro é a descoberta de Abel da multiplicação complexa, muito convenientemente descrita em termos da função Weierstrassiana $\wp(\mu) = \wp(\mu/\omega_1, \omega_2)$[46], com períodos $2\omega_1, 2\omega_2$, surgindo da inversão de certos Integrais Elípticos os quais envolvem a raiz quadrada de um polinómio de grau três. A escolha de $\wp(\mu)$ não implica restrições. Se n é um racional inteiro, $\wp(n\mu)$ é expressa como uma função racional de $\wp(\mu)$. Procurando para outros valores de n, Abel encontra um resultado inesperado. Se c é um número complexo tal que $\wp(c\mu/\omega_1, \omega_2)$ é racionalmente expresso em termos de $\wp(\mu/\omega_1, \omega_2)$, diz-se que $\wp(\mu)$ admite uma multiplicação complexa por c. Para que c possa existir é necessário e suficiente que ${}^{\omega_1}\!/\!_{\omega_2}$ seja a raiz de uma equação algébrica irredutível do segundo grau com coeficientes racionais inteiros.

O segundo detalhe é a representação de Jacobi das suas funções duplamente periódicas às quais hoje nós chamamos Funções Elípticas theta. As funções theta não são duplamente periódicas, uma das quatro apresentadas por Jacobi é[47]:

$$\theta_3(x/\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2}\cos(2n\pi x) = 1 + 2\sum_{m=1}^{+\infty} q^{n^2}\cos(2n\pi x), \text{ onde } q = e^{i\pi\tau} \text{ e } |q| < 1.$$

As outras são obtidas a partir desta por simples transformações lineares em x, por exemplo: $\theta_3\left(x + \frac{1}{2}\Big/\tau\right) = \theta_4(x/\tau)$. À parte da sua extensiva teoria, as Funções Elípticas theta tiveram uma grande importância como guia para mais funções theta gerais, o que é evidenciado quando se estudam as funções de variável complexa.

O terceiro avanço, que abriu um vasto caminho no campo da análise do século XIX, originado também por Abel e Jacobi, foi a necessidade de estabelecer uma ligação entre Funções Elípticas ou entre funções theta, cujos pares de períodos são obtidos a partir de outros por meio de uma transformação linear homogénea. A teoria da transformação inclui um caso especial, que é o problema da multiplicação real, no que se refere a $\wp(n\mu)$, na qual a divisão dos períodos é um número inteiro. Mais tarde apareceu um detalhe desta teoria, que são as Funções Elípticas modulares, as quais são desenvolvidas num campo independente da matemática. Realce-se ainda a ligação com a equação quíntica, para a qual poderá ser encontrada solução (ver [**A51**]), num ponto de vista moderno na teoria linear de grupos.

Deste modo vemos que, ao contrário das funções especiais inventadas primeiro para a solução de problemas de física, tais como os coeficientes de Bessel[48], as Funções Elípticas parece que foram criadas para completar e estender o cálculo integral desenvolvido por Newton[49] (1643-1727) e Leibniz[50] (1646-1716). Com a aplicação da teoria de números por parte de Kronecker[51] (1823-1891) e Hermite[52] (1822-1901), no final de 1850, chega-se à conclusão que também Gauss teria elaborado a sua teoria para as formas quadráticas binárias. Também as curvas e superfícies algébricas são definidas através das Funções Elípticas.

A teoria das Funções Elípticas, aquando do aparecimento da análise complexa, tornou-se mais clara, sendo de realçar o grande contributo de Riemann[53] (1826-1866).

Com a teoria dos resíduos de Cauchy[54] (1789-1857) podem desenvolver-se as Funções Elípticas de uma maneira mais complicada que as de Abel e de Jacobi. Este foi o método seguido por Briot (1817-1842) e Bouquet (1819-1885)[55] e por Riemann.

Num próximo capítulo será analisada a obra de A. Zeferino, *"Integraes e Funcções Ellípticas"*, tentando ver de que forma esta contribuiu para a divulgação e desenvolvimento dos Integrais e Funções Elípticas, em Portugal.

Antes, porém, será feita uma breve análise à vida e obra de António Zeferino Cândido da Piedade bem como ao enquadramento universitário e histórico daquela altura.

Notas

[1] São Integrais da forma $\int f(x,y)dx$ onde f é uma função racional de duas variáveis que estão relacionadas por meio de uma equação algébrica $\chi(x,y) = a_0(x)y^n + a_1(x)y^{n-1} + ... + a_n(x) = 0$ em que os coeficientes $a_j(x)$ são polinómios em x, $j = 0,...,n$.[**A28**]

[2] As funções theta formam, segundo Jacobi (1804-1851), a base da teoria das Funções Elípticas, são elas que lhe vão permitir desenvolver o estudo desta teoria.

[3] A teoria das variedades abelianas, no campo dos números complexos $\mathbb{C}$, é equivalente à teoria das funções abelianas encontradas por Jacobi (1804-1851), Abel (1802-1829) e Riemann (1826-1866). ([**A28**])

[4] Uma função diz-se <u>Modular</u> (ou "Elíptica Modular") se esta satisfaz as seguintes condições:

i) *f* é meromórfica no seu semi-plano superior;

ii) $f(A\tau) = f(\tau)$, para toda a matriz *A* no grupo modular gama;

iii) A série de Laurent de *f* tem a forma $f(\tau) = \sum_{n=-m}^{m} a(n)e^{2\pi i n\tau}$.

As funções modulares são casos especiais das formas modulares, mas não o contrário. ([**A62**])

[5] Uma função <u>Automórfica</u> *f(z)* de uma variável complexa *z* é uma função analítica (excepto nos pólos) num domínio *D* e no qual é invariante sobre um grupo infinito enumerável de transformações lineares fraccionárias (também conhecidas por transformações de Möbius), $z' = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

As funções automórficas são uma generalização das funções trigonométricas e das Funções Elípticas. ([**A62**])

[6] Estas aplicações foram desenvolvidas por Jacobi (1804-1851) e Hermite (1822-1901) e serviram para justificar o interesse das Funções Elípticas bem como a sua eficácia. Uma aplicação das Funções Elípticas à mecânica considerada por Legendre (1752-1833) é, por exemplo, na determinação do movimento de um sólido em torno de um ponto fixo, sem nenhuma força exterior («movimento de Poinsot»).

[7] Como por exemplo: a determinação do potencial de um elipsóide homogéneo ou de um cilindro elíptico homogéneo.

[8] A primeira descoberta da superfície mínima surge através de Lagrange (1765-1843), quando este considerou o seguinte problema de variação: "Encontrar a superfície de menor área limitada por uma curva fechada". Considerando que a superfície necessária é dada na forma $f = f(x,y)$, Lagrange mostrou que $f(x,y)$ poderá satisfazer a equação Euler – Lagrange: $(1+q^2)\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2pq\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (1+p^2)\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ onde $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$. Mais tarde, em 1776, Monge (1746-1818) descobriu que a condição de superfície mínima conduz a uma condição do tipo $H = 0$, e consequentemente as superfícies que obedecem a esta condição são designadas de "mínima". ([**A28**])

[9] Segundo Jacobi (1804-1851), data de nascimento das Funções Elípticas.

[10] Colin MacLaurin nasceu em Fevereiro de 1698 na Escócia e faleceu a 14 de Junho de 1746 na Escócia. Este foi discípulo de Newton (1642-1727) e o principal matemático escocês. O seu nome aparece em vários teoremas os quais ocupam lugar na nossa teoria das curvas planas e na geometria projectiva.

Em 1720 publicou dois tratados sobre curvas: *"De linearum geometricarum proprietatibus"* e "Geometria orgânica" (nesta obra poder-se-á encontrar o «paradoxo de Cramer», cuja resposta aparece somente um século depois através de Plücker (1801-1868)).

Em 1742 aparece "Treatise of Fluxions" (2 vols.), que contém as investigações sobre a atracção dos elipsóides de revolução. Neste tratado ainda podemos encontrar a famosa «série de MacLaurin», a qual não é mais do que um caso especial da série de Taylor.

O "Treatise of Álgebra" de MacLaurin foi publicado em 1748, dois anos depois da morte do autor. Neste tratado aparece a regra para resolver equações em simultâneo através dos determinantes – Regra de Cramer (refira-se, no entanto, que o mundo aprendeu a resolver equações simultâneas através de Cramer (1704-1752) e não de MacLaurin; isto talvez se deva ao facto não só da notação de Cramer ser mais simples, como também a pouca importância dada aos autores ingleses naquela época).

[11] Por exemplo a determinação do período do pêndulo simples (ver [**A2**]) e a declinação de uma barra elástica fina.

[12] Cálculo da medida de comprimento de arco da elipse e da hipérbole (ver [**A51**]).

[13] Com o nascimento do cálculo infinitesimal no séc. XVII, os matemáticos procuraram calcular o comprimento dos arcos das curvas: problema da rectificação. Arquimedes (287-212 a.C.) já tinha tratado do caso do círculo. Descartes (1596-1650), abordou a rectificação de certas curvas a partir de outras, ou através da quadratura (cálculo de áreas). Segundo uma ideia geral de Fermat (1601-1665), quaisquer rectificações poderão ser efectuadas sem alguma construção transcendente.

[14] Refira-se que este tipo de integrais constituiu um grande obstáculo para Leibniz (1646-1716) quando este tentou "fundamentar" o campo de integração. Note-se que Leibniz conseguiu desenvolver uma teoria quase perfeita sobre integrais, mas trabalhando apenas com funções elementares (funções algébricas, circulares, etc...).

[15] John Wallis nasceu a 22 de Novembro de 1616 em Ashford e morreu a 28 de Outubro de 1703 em Oxford. Em 1655 publicou o tratado *"Conic Sections"*, onde as define analiticamente. Em 1656, publica *"Arithmetica Infinitorum"*, considerado o trabalho mais importante, neste tratado sistematiza e estende os trabalhos de Descartes (1596-1650) e Cavalieri (1597-1647). Em 1659, como resposta ao problema sobre a ciclóide, proposto por Pascal (1623-1662), publica um tratado. *"Treatise of álgebra, Both Historical and Practical"*, surge em 1685 sendo a segunda edição publicada em 1693. Wallis considerava absurda a ideia de número negativo, no entanto era curioso que aceitava a ideia de infinito.

Wallis era apenas um, de uma série de homens brilhantes deste período que enriqueceram a matemática com descobertas atrás de descobertas. Mas se este era "forte" em descobertas, o mesmo não se poderá dizer no que se refere ao rigor. (ver [**A13**])

[16] Jacob ou James Bernoulli nasceu em Basileia em 27 de Dezembro de 1654 e faleceu em Basileia a 16 de Agosto de 1705. Bernoulli foi um dos primeiros a usar o cálculo infinitesimal como instrumento da análise e a aplicá-lo a muitos problemas. Em 1691, publica as suas lições. No entanto a descoberta mais importante foi a de encontrar a solução para o problema: "Encontrar a curva Braquistócrona". Em 1698, publica um pequeno trabalho sobre cálculo diferencial e suas

aplicações à geometria. *"Ars Conjectandi"* é publicado em 1713, onde estabelece os princípios fundamentais do cálculo das probabilidades. (ver [**A15**])

[17] Em coordenadas paramétricas é definida da seguinte forma: $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0$.

[18] Johan Heinrich Lambert nasceu a 28 de Agosto de 1728 em Mulhausen e faleceu a 25 de Setembro de 1777 em Berlim. O seu trabalho mais importante foi sobre óptica, o qual surgiu em 1759, sendo ainda de referir mais dois tratados, um sobre perspectiva (1759) e outro sobre cometas (1761). Prova ainda que π é incomensurável (irracional) quando em 1768 publica um trabalho sobre Grandezas Transcendentes.

[19] Com estes desenvolvimentos Lambert (1728-1777) calculou a distância ao pólo e o comprimento de grau do meridiano por diferentes latitudes sobre a terra.

[20] Leonhard Euler nasceu a 15 de Abril de 1707 em Basileia e faleceu a 7 de Setembro de 1783 em Petrograd. Euler escreveu imensas memórias: em 1748 escreveu *"Introductio in Analysin Infinitorum"*, que foi entendida como uma introdução à pura matemática analítica. A este seguiu-se *"Institutiones Calculi Differentialis"*. Entre 1768 e 1770, publica *"Institutiones Calculi Integralis"* (composta de três volumes); em 1741 surge *"Curvarum Maximi Proprietate Gaudentium Inventio"*, publicando em 1770 *"Vollständige Anleitung Zur Álgebra"*.

Os seus trabalhos mais importantes sobre Astronomia são: *"Theoria Motuum Planearum et Cometarum"*(1744), *"Theoria Motus Lunaris"* (1753) e *"Theoria Motuum Lunae"* (1772). Em 1770/71 publicou em três volumes, *"Dioptrica"*. Também escreveu algo no campo da física, publicando as suas lições em 1768/72. (ver [**A15**])

[21] Joseph Louis Lagrange nasceu a 28 de Janeiro de 1736 em Turim e faleceu em Paris a 10 de Abril de 1813. Foi considerado um grande matemático do século XVIII.

Em 1758, funda com o apoio dos seus alunos, *"Miscellanea Tarinensia"*, composta de cinco volumes, seguindo-se, em 1764, um trabalho sobre a oscilação aparente da lua. Embora tenha publicado algumas obras, o seu trabalho monumental é *"Mécanique analytique"*.

Durante 1772 e 1785 contribuiu com uma série de memórias as quais permitiram criar a ciência das equações diferenciais. As suas lições de cálculo diferencial, publicadas em 1797, formam a base da sua obra *"Théorie des fonctions analytiques"*.

Em 1798 publica *"Résolution des équations numériques"*, surgindo em 1804 *"Leçons sur le calcul des fonctions"*. (ver [**A15**])

[22] Cf. Notas, p.vii.

[23] Ver [**A2**].

[24] Giulio Carlo, Conde Fagnano e Marquês de Toschi, nasceu e faleceu em Sinigaglia em 6 de Dezembro de 1682 e 26 de Setembro 1766, respectivamente. Provou que dois arcos de qualquer elipse poderão ser determinados por uma infinidade de caminhos. Em 1750, Fagnano reuniu os seus trabalhos num livro, o qual foi editado em Pesaro. O nome de Fagnano está ainda ligado à elipse $x^2+2y^2=1$ a qual apresenta certas analogias com a hipérbole equilátera ou rectangular. A excentricidade dessa elipse é $1/\sqrt{2}$, e a excentricidade da hipérbole rectangular é $\sqrt{2}$.

[25] Este resultado já tinha sido obtido por MacLaurin (1698-1746) em 1742.

[26] P é um polinómio de grau 4, e da forma $f(x,y)=0$ e f é também um polinómio de grau 2 pelo que respeita a cada uma das variáveis x e y e tal que $f(x,y)=f(y,x)$.

[27] Carl Gustav Jacob Jacobi nasceu em Potsdam, Prússia a 10 de Dezembro de 1804 e morreu em Berlim a 18 de Fevereiro de 1851. Desde cedo se começou a interessar por assuntos matemáticos, e sendo um grande admirador de Euler (1707-1783) estudou a obra *"Introductioin analysin infinitorum"*. Foi um dos fundadores da teoria das Funções Elípticas, baseando grande parte dos seus resultados no estudo das quatro funções definidas à custa de séries infinitas.

Jacobi introduziu os termos "integral abeliano" e "função abeliana" e generalizou alguns resultados de Abel (1802-1829), como por exemplo, inverteu integrais hiperelípticos e obteve "funções abelianas" com mais de uma variável. Publica em 1829 um tratado sobre Funções Elípticas *"Fundamenta Nova Theoria Functionum Ellipticarum"*. (ver [**A15**])

[28] São polígonos inscritos num círculo dado e circunscritos a um outro círculo. Sendo que se o primeiro tem centro O e raio R, enquanto que o segundo, de raio r, é centrado num ponto de coordenadas polares $(a,0)$, os ângulos polares φ e φ' dos pontos onde uma tangente ao último círculo encontra o primeiro estão ligados pela relação $\cos\varphi\cos\varphi' + \left(\frac{R-a}{R+a}\right)\sin\varphi\sin\varphi' = \frac{r}{(R+a)}$.

[29] Estudou o movimento de corpos atraídos para dois centros fixos, com forças $\frac{a}{r^2}$ e $\frac{a'}{r'^2}$ onde r e r' são as distâncias aos dois centros.

[30] Alembert (1717-1783) e MacLaurin (1698-1746) já o tinham tentado perto de 1740.

[31] Este é feito de modo análogo ao de uma cónica ou da lemniscata.

[32] São os integrais da forma $\int R(x,y)dx$ onde R é uma função racional em x e y e onde $y=\sqrt{P(x)}$ com P polinómio de grau 4 (ou 3) sem raízes múltiplas.

[33] Adrian Marie Legendre nasceu a 18 de Setembro de 1752 em Toulouse e morreu em Paris a 10 de Janeiro de 1833. O trabalho mais importante foi *"Traité des fonctions elliptiques"* o qual foi publicado em dois capítulos entre 1825 e 1826. Um terceiro capítulo foi adicionado meses antes da sua morte, e continha três memórias de dois matemáticos: Abel (1802-1829) e Jacobi (1804-1851). Para além deste, publicou, em 1794, *"Eléments de geometrie"* (este livro teve muitas edições e foi traduzido para várias línguas); *"Théorie des nombres"* (1798) adicionando em 1816 e 1825 apêndices. Entre 1811 e 1819 publicou, em três volumes, *"Exercises du calcul intégral"*, e alguns anos mais tarde *"Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes "*. (ver [**A13**])

[34] Ver Apêndice A.

[35] O qual dá o comprimento de arco da elipse.

[36] Uma das relações encontradas é a seguinte:

$$F^1(k)E^1(k') + F^1(k')E^1(k) - F^1(k)F^1(k') = \frac{\pi}{2}$$ para valores particulares de k e k'.

[37] Esta equação já tinha sido encontrada por Gauss (1777-1855) aquando dos seus trabalhos sobre a média aritmético-geométrica.

[38] Joseph Liouville nasceu a 24 de Março de 1809 em Saint-Omer, França e faleceu em Paris a 8 de Setembro de 1882. Liouville descobriu alguns resultados geométricos sem no entanto os publicar.

Em 1830, escreve um número considerável de artigos, sobre electrodinâmica (tema que é retomado mais tarde), equações diferenciais parciais e teoria do calor. Em 1836, fundou o *Journal de Mathématiques Purés e Appliqués*. Este jornal é muitas vezes chamado *Journal de Liouville*. Entre 1832 e 1833, investigou o critério para integrais de funções algébricas. Outra área importante foi a dos transcendentes. Em 1851 publicou resultados sobre números transcendentes, deixando de usar as fracções contínuas. Na área da teoria de números Liouville escreveu cerca de 200 páginas, trabalhando, essencialmente, sobre reciprocidade quadrática. (ver [**A13**])

[39] C.f. Notas, p. vi.

[40] Informalmente, uma Curva Elíptica é um tipo de curva cúbica cujas soluções estão contidas numa região de um espaço topologicamente equivalente a um Toro. A Função Elíptica, de Weierstrass (1815-1897), $\wp(z:g_2,g_3)$, descreve como conseguir, a partir deste Toro, a forma algébrica de uma curva elíptica.

Formalmente, uma Curva Elíptica num campo K é uma curva cúbica não singular em duas variáveis $f(X,Y)=0$, com um ponto K racional. ([**A62**])

[41] O seno lemniscato $slu = x$ é definido por $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ e co-seno lemniscato por $clu = sl\left(\left(\frac{w}{2}\right)-u\right)$ onde $\frac{w}{2}=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

[42] Integral análogo ao de 1ª espécie de Legendre.

[43] [**A14**], p.395.

[44] [**A18**], p.376.

[45] As funções escritas por Jacobi (1804-1851) como $\Theta(x)$ e $H(x)$ são, usualmente, denotadas por $\theta_4(x)$ e $\theta_1(x)$ respectivamente. As Funções Elípticas de Jacobi: $\sin amu$, $\cos amu$ e Δamu, são actualmente escritas da seguinte forma: snu, cnu e dnu (notação de Gudermann).

[46] A expressão analítica $\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\omega\in L'}\left[\frac{1}{(z-\omega)^2}-\frac{1}{\omega^2}\right]$, onde L' é o conjunto constituído por todos os períodos diferentes de zero. ([**A38**])

[47] Onde nós escrevemos θ_3 e θ_4, Jacobi (1804-1851) escreve ϑ_3 e ϑ. Jacobi mudou a notação Θ, H, H_1 e Θ_1 (usada nos seus *Fundamenta Nova)* para ϑ, ϑ_1, ϑ_2 e ϑ_3.

[48] As funções de Bessel são definidas mais frequentemente como sendo soluções da equação diferencial seguinte:

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-n^2)y=0$$

Existem duas espécies de soluções: funções de Bessel de 1ª espécie $J_n(x)$ e funções de 2ª espécie $Y_n(x)$. (A função de Bessel de 3ª espécie é uma combinação especial das de 1ª e de 2ª). ([**A62**])

[49] Isaac Newton nasceu em Woolsthorpe, Inglaterra a 4 de Janeiro de 1643 e faleceu a 31 de Março de 1727 em Londres. Embora tenha sido o primeiro a chegar ao cálculo, foi Leibniz (1646-1716) quem o publicou em primeiro lugar.

A sua grande autoridade baseava-se na sua *"Philosophiae naturalis principa mathematica"* (obra na qual se podia encontrar a lei da gravitação). Demonstrou, por uma dedução matemática rigorosa, que as leis empíricas de Kepler (1571-1630) sobre o movimento dos planetas se explicam pela lei gravitacional dos inversos quadrados. Fundamentou a teoria do potencial, e a descoberta das «fluxões» estava ligada aos seus estudos sobre séries infinitas.

Outra contribuição de Newton foi o método para encontrar aproximações de raízes de equações numéricas.

Newton, ao contrário de outros matemáticos, hesitou sempre em publicar as suas descobertas. (ver [**A15**])

[50] Gottfried Wilhelm von Leibniz nasceu a 1 de Julho de 1646 em Leipzig, Alemanha e faleceu a 14 de Novembro de 1716 em Hannover, Alemanha. Leibniz foi um dos primeiros, depois de Pascal (1623-1662), a inventar uma máquina de calcular.

Em 1666 publica o seu primeiro artigo sobre análise combinatória. A primeira publicação de Cálculo ocorreu em 1684, num artigo de 6 páginas da *Acta eruditorum* (Jornal de matemática fundado em 1682). A este artigo, que abordava um novo método para o cálculo de máximos e mínimos e para tangentes, seguia-se outro em 1686, com as regras do cálculo integral com o símbolo . Leibniz deu ênfase à relação inversa entre diferenciação e integração no teorema fundamental do cálculo.

A notação que usamos, bem como os nomes "cálculo integral" (inicialmente *summatorius*) e "cálculo diferencial" ficaram a dever-se a este autor. Os termos «função», «coordenadas» e «osculação» também lhe estão ligados.

Entre as contribuições menos relevantes estão os seus comentários sobre números complexos e a observação do sistema binário de numeração. (ver [**A15**])

[51] Leopold Kronecker nasceu a 7 de Dezembro de 1823 em Liegnitz, Prússia e faleceu em Berlim a 29 de Dezembro de 1891. Na Universidade de Berlim entrou em contacto com matemáticos como Weierstrass (1815-1897), Dirichlet (1805-1859), Jacobi (1804-1851) e Steiner (1796-1863), obtendo o grau de doutor em 1845 com uma tese sobre teoria algébrica de números. As suas principais contribuições foram na teoria das Funções Elípticas, na teoria dos ideais e na aritmética das formas quadráticas. As lições por ele publicadas, sobre a teoria de números, não eram mais do que as suas descobertas, as quais tinham como objectivo principal aritmetizar a matemática. Os ensinamentos deste sobre o infinito estavam em contraste com as teorias de Dedekind (1831-1916) e mais ainda com as de Cantor (1845-1918).

O nome de Kroneker está ligado à célebre frase: "Deus fez os números inteiros e os homens fizeram o resto", a qual surge aquando da tentativa, por parte deste, de modelar toda a matemática segundo a teoria de números. (ver [**A15**])

[52] Charles Hermite nasceu a 24 de Dezembro de 1822 na Lorena, França e faleceu em Paris a 14 de Janeiro de 1901. Tal como Galois (1811-1832) foi atraído pelo estudo das equações algébricas e num dos seus trabalhos tentou mostrar que não é possível encontrar a solução de uma equação quíntica. Mostra em 1858 que uma equação algébrica do quinto grau poderia ser resolvida usando as Funções Elípticas, um dos seus sucessos notáveis.

Trocou algumas cartas com Jacobi (1804-1851) sobre funções abelianas, as quais utilizou em trabalhos posteriores. Ainda nesta correspondência trocada com Jacobi, poderão ser encontradas algumas descobertas, por parte de Hermite, sobre equações diferenciais nas quais foram usadas as funções theta. Em 1848 provou que as funções duplamente periódicas podem ser representadas como quocientes de funções inteiras periódicas. Um outro tema abordado por Hermite foi a teoria dos Invariantes.

Em 1873 publicou a primeira prova de que ***e*** é um número transcendente. Hoje, Hermite é talvez o matemático que tem o seu nome mais vezes referido em conceitos matemáticos, como por exemplo: Polinómios de Hermite, Matrizes Hermiteanas, etc. (ver [**A15**])

[53] Georg Friedrich Bernhard Riemann nasceu em Breselenz a 17 de Setembro de 1826 e faleceu a 20 de Julho de 1866 em Selasca. Tem um papel fundamental na teoria das funções com variável complexa. Na sua tese de doutoramento (1851) estuda a teoria das Variáveis Complexas, e em particular, o que nós designamos por superfícies de Riemann, introduzindo na mesma os métodos topológicos.

Em 1857 publica "*Teoria das funções abelianas*", na qual aplica as suas ideias às funções hipergeométricas e abelianas. Num artigo postumamente publicado (1867), podemos ver as suas ideias aplicadas à teoria das superfícies mínimas.

O último artigo de Riemann, é publicado em 1859, e consiste na discussão do número $F(x)$ de primos menores que um dado número x, no qual examina a função zeta $\left(\zeta(s)=\sum\left(\frac{1}{n^s}\right)=\prod\ 1-p^{-s}\ ^{-1}\right)$.

Embora tendo uma vida curta, contribuiu para o desenvolvimento de muitos ramos da matemática, e pode mesmo ser considerado o homem que mais influenciou a matemática moderna. (ver [**A15**])

[54] Augustin Louis Cauchy nasceu a 21 de Agosto de 1789 em Paris e faleceu a 23 de Maio de 1857 em Sceaux, França. Ao contrário da maioria dos matemáticos, assim que conseguia um resultado publicava-o logo e, talvez por isso, a introdução do rigor lhe tenha sido atribuída. Cauchy estava constantemente a publicar artigos, os quais focavam vários tópicos, incidindo sobretudo na teoria das funções de variável complexa, tornando-se fundador deste campo em 1814. Foi este autor que deu a conhecer, no fim da segunda década do século XIX, o diagrama de Wessel-Argand-Gauss para um número complexo, bem como as propriedades fundamentais das funções complexas.

Publicou três obras nas quais deu ao cálculo elementar o carácter que tem hoje: *"Cours d'analyse de l'École Polytechnique"* (1821), *"Résumé des leçons sur le Calcul infinitesimal"* (1823) e *"Leçons sur le Calcul différenciel"* (1829).

Rejeitando o caminho de Lagrange (1765-1843) que se baseava em funções pelo teorema de Taylor, Cauchy tornou fundamental o conceito de limite d'Alembert (1717-1783), dando-lhe um carácter aritmético de maior precisão. Dispensando a geometria e infinitésimos ou velocidades, chegou à definição de limite.

O cálculo dos resíduos foi invenção sua. A prova que deu do teorema de Taylor originou uma discussão sobre a dupla periodicidade das Funções Elípticas. (ver [**A15**])

[55] Em 1859 Briot (1817-1842) e Bouquet (1819-1885) publicaram um tratado em dois volumes sobre funções duplamente periódicas. Em 1875, novamente juntos, publicaram um tratado sobre Funções Elípticas e, ainda, uma segunda edição do trabalho publicado em 1859.

Em 1879 Briot, nesta altura como único autor, produziu um tratado sobre Funções Abelianas.

Briot e Bouquet desenvolveram o trabalho de Cauchy (1789-1857) sobre a existência de integrais das equações diferenciais. Juntos escreveram textos importantes sobre este e outros assuntos.

Capítulo 2

António Zeferino Cândido da Piedade

2.1 Biografia

António Zeferino Cândido da Piedade, nome quase nunca referenciado não consta das principais Enciclopédias Portuguesas, nem mesmo em estudos sobre Ciência e História de Portugal. Até o seu processo, existente no Arquivo da Universidade de Coimbra, pouca informação tem acerca deste doutor em Matemática, que foi também escritor e jornalista e que não poderá, no entanto, deixar de ser citado como o primeiro português a abordar o tema "Integrais e Funções Elípticas" sobre o qual se propôs defender em Conclusões Magnas em 1875[1].

Filho de Justino Cândido da Piedade e de Joaquina Emília do Nascimento, nasceu a 22 de Outubro de 1848[2], em Almas de Freire, na pacata vila de Serpins, concelho da Lousã[3], distrito de Coimbra, vindo supostamente a falecer em Espanha, Vigo, por volta de 1916/17[4].

Efectuou matrícula na Universidade de Coimbra a 3 de Outubro de 1867, onde, em 5 de Julho de 1872 obteve o grau de Bacharel sendo Bacharel Formado[5], em Filosofia, a 28 de Junho de 1873.

Três anos mais tarde, a 11 de Julho de 1875, obteve o grau de Doutor[6]. Para concorrer a este grau apresentou para dissertação inaugural[7] *"Integraes e Funcções Ellípticas"* bem como uma colecção de teses[8], exigidas na época para o efeito.

Durante a sua vida académica, esteve algumas vezes entre os estudantes premiados, obtendo o 1º prémio na 1ª Classe, na Classificação numérica dos Alunos da Faculdade de Matemática[9], onde teve a oportunidade de "contactar" com Francisco Gomes Teixeira (1851-1933)[10], um grande marco da Matemática portuguesa.

Para além desta obra, enquanto professor publica *"Álgebra Elementar"*, Coimbra, Almeida Cabral 1876; *"Sobre um theorema da theoria dos números"* (J.S.M[11]., 1877, 171-172)[12]; *"Sobre uma questão proposta"* (J.S.M. 1877, 94 – 96)[13]; *" Elementos de Geometria"*, Coimbra, J. Diogo Pires, 1877; *"Elementos de Trigonometria Rectilínea"*, Coimbra, Imprensa da Universidade 1874. Escreveu ainda, embora não venha mencionado no livro de Rodolphe Guimarães "Les Mathemátiques en Portugal", *" Paralaxe Solar"*[14].

Em 1876, publica *"Resposta ao Questionário da Comissão de Instrução Secundária"*[15].

Em 1878 embarca para o Brasil, onde permanece durante 20 anos. Esta ida para o Brasil tem como objectivo divulgar, através de conferências, a *"Cartilha Maternal de João de Deus"*[16], propagando desta forma o sistema de ensino denominado de João de Deus.

Neste país, dirigiu três jornais: "Cruzeiro", "A Época" e o "País". Foi ainda director e proprietário do Colégio D. Pedro de Alcântara. Dedicou-se à História e Geografia e escreveu algumas obras de grande envergadura nesses campos.

Em 1898 publica *"A Honra de Vasco da Gama"*[17] e *"Portugal"*[18]; em 1900 *"Brazil"*[19], publica ainda *"A liberdade, as suas lutas, as suas vítimas"*[20], bem como três estudos, com as monografias da obra de Vasco da Gama, Villegaignom e Colombo.

Em 1901, regressou a Portugal. Foi sócio da Sociedade Portuguesa de Geografia e fundou o jornal "A Época"[21], do qual foi director e proprietário.

Em 1915, publica *"O Canhão Vence... mas a Verdade Convence"*[22].

Como se pode observar António Zeferino Cândido da Piedade empenhou-se mais como escritor e jornalista, e não tanto nos assuntos matemáticos.

2.2 Enquadramento Universitário

> “ (...), o séc. XIX português – (...) tem uma viragem que, simbolicamente, pode ser marcada pelo início da regeneração, os anos 50. (...) a produtividade matemática, encarada seja sob a forma de publicação de textos escolares, ou de exposições (teses de concurso), de trabalhos de aplicação e de trabalhos de investigação, tem uma viragem radical por volta de 1850, aumentando então substancialmente”. J.TIAGO DE OLIVEIRA.

Embora depois de 1834, ano em que terminou a guerra civil, a Faculdade de Matemática se tivesse deparado com problemas semelhantes aos que teve após a Reforma Pombalina, falta de pessoal[23], o certo é que a partir da década de 50, talvez por influência da Revolução Francesa e do Liberalismo, a faculdade começou a desenvolver-se. A maioria dos trabalhos era publicada na revista “O Instituto”, revista cientifica e literária, fundada em 1853.

Depois dos Estatutos de 1772, que surgiram com a reforma Pombalina, para além da conversão da cadeira de Matemática em Faculdade, várias reformas se verificaram, nomeadamente no que concerne ao plano de estudos, entre outras. Assim, depois da Reforma de Passos Manuel[24] em 1836, outras alterações se seguiram em 1840[25], 1844[26] e 1852[27]. No entanto, em 1861 o plano de estudos foi novamente alterado, incluindo neste cadeiras de Filosofia[28]. Finalmente em 1866, houve mais uma revisão[29].

Outra das reformas dos Estatutos Pombalinos, foi a adopção de livros, o que até então não se verificava[30]. Theóphilo Braga na “*História da Universidade de Coimbra*” aludia a este facto da seguinte forma: “ (...) a preocupação dos reformadores que cooperam com o grande ministro foi dar às lições dos lentes um livro de texto, um compêndio”[31].

Os Estatutos determinavam ainda que, caso não houvesse um manual em português, deveria ser adoptado um em língua estrangeira, sendo a relação de livros para a Faculdade de Matemática, tal como aparecem indicados no Anuário da Universidade de Coimbra de 1867/ 68, os seguintes[32]:

PRIMEIRO ANNO

1ª Cadeira - *Francouer* Curso completo de Mathematicas Puras, -
traduzido pelos Drs. Castro Freire e Sousa Pinto.
Coimbra, 1853 a 1857. 4 vol.

SEGUNDO ANNO

2ª Cadeira – Os mesmos da primeira cadeira.

TERCEIRO ANNO

3ª Cadeira – *Poisson* – Traité de mecanique – 2 vol.
4ª Cadeira – *Leroy* – Géometrie Descriptive.
- *Leroy* – Traité Stereotomie.

QUARTO ANNO

5ª Cadeira – *Sousa Pinto* – Elementos de Astronomia,1.ª e 2.ª parte. Coimbra
- *Monteiro da Rocha* – Taboas Astronomicas. Coimbra, 1813
- Ephemerides Astronomicas para 1867.Coimbra, 1865.
- *E.D.Dubois* – Traité élémentaire d´astronomie.

6ª Cadeira – *Puissant* – Géodesie et Topographie.

QUINTO ANNO

7ª Cadeira – *Pontécoulant* – Théorie analytique du système
du monde, 1.º e 2.º tomos.
8ª Cadeira – *Poisson* – Traité de mecanique.
- *Lamé* – Traité de la elasticité et theorie de la chaleur
- *Bresse* – Mechanique appliqué.

Nota-se um grande desenvolvimento do ensino da matemática durante a segunda metade do século XIX.

Um dos grandes contributos para este desenvolvimento são as visitas e as viagens científicas realizadas às nações onde a ciência estava mais desenvolvida. Não podemos deixar de referir os contributos, neste aspecto, do Observatório Astronómico[33], uma vez que ficou deliberado em carta régia de 4 de Dezembro de 1799, artigo 13, que de dez em dez anos, um ajudante do Observatório se deslocaria a Observatórios estrangeiros acreditados.

O mesmo Theóphilo Braga escrevia:

> " Também Eça de Queirós, referindo-se em 1878 a essa deslumbrante crise mental, esboça em quatro traços característicos aquella geração académica: « Ha quasi doze annos appareceu, vinda parte de Coimbra, parte d´aqui, parte d´acolá, uma extraordinária geração académica: educada já fora do catholicismo e do Romantismo, ou tendo-se emancipado d´elles, reclamando-se exclusivamente da Revolução e para a Revolução.»". ([**A20**], p.506)

Verifica-se assim no período mediado entre 1867 e 1875 uma estabilidade, a qual já não acontecia havia vários séculos. O número de doutoramentos neste período é relevante, como se pode verificar no gráfico abaixo[34]:

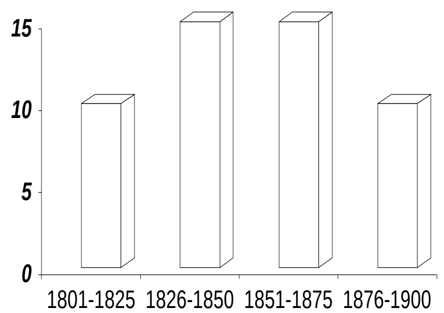


Gráfico 2.1: Número de Doutoramentos

Assim, em 1867 todas as cadeiras do Curso de Matemática tinham professores catedráticos proprietários, existindo ainda 4 lentes substitutos[35].

No que se refere ao número de alunos, este também era considerável, como se pode observar no quadro seguinte[36]:

FACULDADES	ANNOS						TOTAES
	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	
Theologia....................	19	4	18	16	9	3	69
Direito.........................	46	59	47	81	51	5	289
Curso Administrativo	29	13	3	»	»	»	45
Medicina.....................	6	10	12	14	10	4	56
Curso de Pharmacia....	15	3	»	»	»	»	18
Mathematica................	59	18	8	5	»	4	94
Philosophia..................	48	24	54	43	18	2	189
Desenho......................	53	35	6	7	»	»	101
Totaes............	275	166	148	166	88	18	861

Pelo numero de matriculas 861

Individualmente 535

Quadro 2.1: Número de Estudantes da Universidade de Coimbra

Sendo que o número de alunos da Faculdade de Matemática, nesta data, era o seguinte:

Mappa estatistico do movimento dos Estudantes da Universidade de Coimbra no anno lectivo de 1867 a 1868.

Faculdades	Annos	Habilitados – Examinados – Approvados – Nemine Discrepante	Simpliciter	Reprovados	Deixaram de fazer acto	Total	Perderam o anno	Matriculas annulladas	Total	Total geral	Actos de estudantes de annos anteriores – Approvados – Nemine Discrepante	Simpliciter	Reprovados	Total
MATHEMATICA	1.º	32	8	»	5	45	18	1	14	59	4	2	2	8
	2.º	8	1	»	2	11	5	2	7	18	»	»	»	»
	3.º	8	»	»	»	8	»	»	»	8	»	»	»	»
	4.º	4	»	»	»	4	1	»	1	5	»	»	1	1
	5.º	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
	6.º	»	»	»	4	4	»	»	»	4	»	»	»	»
	Total	52	9	»	11	72	19	3	22	94	4	2	3	9
Total geral		620	81	18	43	752	88	23	111	845	19	6	3	30

(a) Neste numero vai incluido um exame de Economia Politica sómente, do Estudante militar.
Secretaria da Universidade, em 22 de Outubro de 1868. — O Secretario, *Manuel Joaquim Fernandes Thomaz.*

Quadro 2.2: Movimento dos Estudantes da Universidade de Coimbra no ano lectivo 1867/ 1868. ([**A5**])

Na Faculdade de Matemática, para além do curso preparatório para a Escola do Exército, funcionavam ainda várias cadeiras de Desenho.

Outro aspecto a realçar são as teses de doutoramento, que só começaram a ter publicação obrigatória a partir de 1857, e na década de 70 começam a aparecer temas mais diversificados.

Tal como refere Francisco de Castro Freire:

> “ (...) apezar da insignificante retribuição que resulta da publicação de livros mathematicos, e principalmente dos que tractam das partes mais elevadas da sciencia, a nossa exposição scientifica neste ramo, vivificada pelo impulso universitário, é muito superior ao que poderia esperar-se, se attendermos aos obstaculos de toda a ordem com que têm de luctar aquelles a quem o zelo e o amor da sciencia levam á publicação do fructo mais apurado dos seus estudos”. ([**A30**], p.117)

Podemos concluir, tendo em consideração os condicionalismos da época, que não foi feita muita matemática nova. No entanto, houve uma preocupação não só em termos de qualidade do ensino como também na investigação.

Refira-se que, nesta altura, ainda permanecia um "resto" da escolástica, como podemos concluir das palavras proferidas pelo Dr. Sidónio Bernardino Cardoso da Silva Pães (Lente Catedrático da Faculdade de Matemática), aquando da Oração de Sapiência[37] no dia 16 de Outubro de 1908:

> " Pela minha parte encontro, entre outros, tres defeitos fundamentaes na organização desta Escola. O primeiro é peculiar a ella: é a subsistencia das velhas fórmulas da sua primitiva estructura religiosa e clerical.
>
> O segundo, de certo o mais grave de todos, é uma doença commum a toda a nossa instrucção publica e resume-se na annullação da iniciativa do alunno.
>
> O terceiro emfim – a estreiteza do circulo em que se projecta a luz da instrucção, - é não só um mal da nossa organização escolar e um problema para resolver ainda em muitos países civilizados, mas é mesmo uma das faces da questão social ". (**[A55]**, pp.355, 356)

O mesmo Sidónio Paes em Oração de Sapiência, acima citada, referia:

> " Uma vibração salutar percorre o systema nervoso do povo português, que começa a ter consciência da tremenda crise que asphyxia a nação.
>
> Á habitual apathia das suas classes pensantes substitue-se uma viril actividade, ainda febril e desordenada, que pretende a todo o transe impedir o movimento de decomposição geral, suster a derrocada." (**[A55]**, p.365)

No próximo capítulo vamos ter oportunidade de verificar que de facto houve algum avanço. O ensino da matemática estava bastante actualizado, não tanto em inovação mas em transmissão de novos conceitos e descobertas daquela época.

Notas

[1] O acto de conclusões magnas era "principalmente uma prova de ostentação, para o candidato ter ensejo de patentear livremente os seus talentos nos pontos a que mais especificamente se tem dedicado, e simultaneamente os recursos da sua dialéctica na defesa da verdade científica". ([**A53**], p.XXV)

[2] É indicada como data de nascimento, no entanto esta data é referente ao baptismo.

[3] Vila na qual existe uma rua (Ver Anexo I), com o nome de António Zeferino Cândido, por proposta da Biblioteca Municipal. Nesta biblioteca, uma das mais antigas do distrito de Coimbra, existe uma bibliografia considerável deste matemático.

[4] Outras fontes indicam, como data do seu falecimento, 1912.

[5] Era o último dos graus menores, obtido quando concluíam o 4º ano.

[6] Era o último grau a que se pode chegar. Para concorrer a este grau era necessário obter na licenciatura classificação mínima de Bom em mérito literário. (ver Anexo II)

[7] Esta dissertação versava um ponto escolhido pelo candidato, o qual era composto unicamente para este fim.

[8] Ver Anexo III. O número de teses a apresentar era definido pelo Conselho da Faculdade de Matemática (Anexo IV).

[9] " Em virtude dúm pedido do ministro dos negócios da guerra feito ao ministério do reino, e por este transmitido à Congregação de Mathemática em 20 de Julho de 1853, decidiu esta classificar os estudantes do 3º anno mathemático pelo seu merecimento scientífico, collocando: na primeira classe, os estudantes premiados ou julgados distinctos; na Segunda, os que fossem apenas approvados *nemine discrepante*; e finalmente na terceira classe, os approvados *simpliceiter*". ([**A30**], p.77).

[10] Francisco Gomes Teixeira nasceu em S. Cosmado, Viseu, a 28 de Janeiro de 1851 e faleceu no ano de 1933.

Como tantos outros matemáticos, também Gomes Teixeira não revelou de tenra idade a sua propensão para as ciências exactas. Com 17 anos, ingressa na Universidade de Coimbra e com 20 anos, apenas, prepara o seu primeiro trabalho: "O desenvolvimento das funções em fracção contínua". Gomes Teixeira conclui, em 1873, o curso com informação final: «muito bom com 20 valores».

Em 1875, faz os actos de licenciatura e de conclusões magnas, sendo doutorado com 20 valores. A sua dissertação de doutoramento versava o seguinte tema: a integração das equações de segundas derivadas parciais.

Entre 1880 e 1883 foi professor em Coimbra e neste último ano foi nomeado para a Academia Politécnica do Porto.

Gomes Teixeira foi autor de mais de 140 trabalhos, os quais foram publicados em destacadas revistas, como por exemplo, *Jornal de Crelle*, Jornal de Liouville e também no "Jornal de Sciencias mathematicas e Astronomicas" do qual foi fundador.

Um ano antes de falecer, proclamou uma série de lições sobre "História da Matemática em Portugal". É de realçar ainda a seguinte frase, por ele proferida: "Nunca deixei em qualquer estudo matemático, de traçar a história da questão nele versada". (ver [**A32**])

[11] J.S.M. – "Jornal de Sciencias mathematicas e Astronomicas" – o qual permitiu o desenvolvimento das relações entre matemáticos portugueses e os estrangeiros, dando desta forma divulgação aos trabalhos que eram feitos em Portugal.

Este jornal era composto por duas secções: uma com questões de Matemáticas Superiores e outra na qual eram publicados artigos sobre Matemática Elementar, Notícias Astronómicas, etc., as quais se destinavam às pessoas que só conheciam a Matemática.

[12] " L'auteur démontre que si $N+x^2=y^2$ est un nombre premier, l'équation $N+x^2=y^2$ a seulement une solution $y=\frac{N-1}{2}$, $y=\frac{N+1}{2}$". ([**A32**], p.203)

[13] "Resolver com os únicos recursos da geometria elementar a questão seguinte:

Por um ponto dado no plano de um circulo, tirar uma transversal tal, que as distancias d'este ponto aos de intersecção com o circulo estejam n'uma razão dada $\frac{m}{n}$". ([**B2**], p.94)

[14] Dissertação voltada para a Astronomia, onde ele expõe três métodos diferentes de observação empregados nas passagens de Vénus. Ele dedica este trabalho aos amigos.

[15] Neste trabalho A. Zeferino dá uma opinião relativa ao questionário a que se refere a portaria do ministério do reino de 4 de Novembro de 1876, tal como ele refere: " (...) apressamo-nos a corresponder a tamanha honra, dando conta a v.ex.ª da nossa humilde opinião, relativa a cada um dos quesitos, mais com o fim de testemunharmos o nosso interesse pela causa, do que irmos em auxílio a quem d'elle não carecerá ". ([**A50**], p.5)

[16] Já em Portugal, António Zeferino tinha feito uma defesa da mesma.

[17] Nesta obra encontra-se o artigo "PORTUGAL A´S DIREITAS", publicado na Gazeta da Tarde, o qual faz referência ao trabalho de A. Zeferino no que se refere à divulgação do ensino denominado de João de Deus.

[18] Tal como o próprio autor refere:

" Divide-se naturalmente em tres partes, formando tres volumes.

A primeira, da fundação da monarchia a Aljubarrota e valverde, e o mestre de Aviz e Nuno Alvares Pereira. E´o período organogenico da patria.(...)

A Segunda parte, vai de Ceuta até à morte do príncipe perfeito (1415 – 1495). E´o período da elaboração e da fixação do ideal epico.

A terceira parte, é a da resolução definitiva e pratica (...)". ([**A49**])

[19] Nesta obra, o autor divide a Introdução em três capítulos, a saber: Grandes Navegações; Povoamento da América e Os Percursores de Cabral. O restante trabalho é dividido em duas partes. A primeira parte fala sobre: O descobrimento; A Ancoragem; o Nome e O Índio. Na Segunda parte: O Reconhecimento; Vespucio Documentado; Vespucio na Lenda; Um documento falso; Outro documento falso; O capitão da Armada de 1501; Vespucio na História; O autor do Roteiro Geral; Expedição de Gonçalo Coelho e A questão de Malaca. ([**A45**])

[20] Compilação de várias conferências.

[21] O primeiro número deste jornal sai a 1 de Maio de 1902 e o seu último número em 1 de Julho de 1909. Jornal de apenas quatro páginas. Continha muita publicidade. Para além das notícias portuguesas publicava notícias do estrangeiro nomeadamente de França e Brasil. Informa ainda, entre outros assuntos, sobre teatro, livros e horário de comboios.

[22] Obra publicada aquando da guerra de 1914/18, constituída por sete capítulos.

[23] Esta falta de pessoal verificou-se devido à maioria dos lentes não ter retomado as suas cadeiras, ou porque foram leccionar para outras escolas, ou porque foram delegados para outros cargos.

[24] Distribui as cadeiras da faculdade por 5 anos. Até esta data a Faculdade de Matemática tinha o seguinte plano de estudos: no 1º ano estudava-se Geometria; no 2º ano Álgebra; no 3º ano Foronomia e no 4º ano Astronomia. Tinham ainda uma cadeira de Desenho que era facultativa para os alunos do 3º e 4º anos e obrigatória para os do 1º ano.

[25] Alterações nas cadeiras do 4º e 5º anos. Passando então a ser leccionado na 4ª cadeira do 4º ano Geometria descritiva, Geodesia e Arquitectura e na 5ª cadeira Astronomia Prática. No que se refere ao 5º ano, na 6ª cadeira ensinava-se Mecânica Celeste e na 7ª Hidráulica. No entanto, estas alterações foram provisórias.

[26] Efectuadas pelo Conselho Superior de Administração Pública, aquando da reforma de 20/09/1844.

[27] Esta alteração foi feita a pedido da Faculdade e aprovada pela portaria de 20 de Outubro de 1852. A Congregação da Matemática decidiu então que no 3º ano na 3ª cadeira ter-se-ia Cálculo Superior, diferenças finitas; Geometria descritiva; na 4ª cadeira Mecânica racional dos Sólidos e Fluidos e Óptica. No 4º ano na 5ª cadeira Astronomia Prática e na 6ª cadeira Mecânica Aplicada; Geodesia; na 7ª cadeira Mecânica Celeste. Para além destas os alunos do 1º, 2º e 5º anos ainda tinham cadeiras na faculdade de Filosofia.

[28] Ver Anexo V. ([**A30**], pp.69,70).

[29] Esta limitou-se a trocar as matérias da 7ª e 8ª cadeiras de 5º ano.

[30] Antes eram usadas as sebentas (Postillas). Apontamentos das lições orais, passados a limpo e litografados, dactilografados ou impressos, para uso dos estudantes.

[31] [**A20**], p.500.

[32] Dos livros indicados, apenas eram de carácter obrigatório os seguintes: o livro referente à 1.ª cadeira; e os livros de Sousa Pinto, Monteiro da Rocha e Ephemerides Astronomicas para a 5.ª cadeira do quarto ano. No início de cada ano lectivo eram afixados editais com a indicação dos livros de que os alunos se deviam munir.

[33] O observatório estava em ligação directa com o de Lisboa. O pessoal do observatório estava dividido em duas secções, uma dos observadores e outra dos calculadores.

[34] [**A56**].

[35] Anexo VI. ([**A5**], p.102).

[36] *Ibidem*, p.136.

[37] Oração de Sapiência – discurso inaugural do ano lectivo.

Capítulo 3

A Dissertação de António Zeferino Cândido da Piedade

3.1 Nota Prévia

Tal como foi referido, no Capítulo 2 deste trabalho, António Zeferino Cândido da Piedade apresentou diversos temas para dissertação propondo-se defender, em Acto de Conclusões Magnas, um tema pouco abordado na Universidade de Coimbra. A sua monografia, composta de pouco mais de cem páginas, como o próprio autor refere no seu prefácio, foi baseada nos trabalhos de Legendre (1752-1833) e de Cauchy (1789-1857) sendo publicada, pela Imprensa da Universidade de Coimbra, em 1875, com o nome *"Integraes e Funcções Ellípticas"*. Este pequeno trabalho de 107 páginas foi publicado no mesmo ano que *"Theorie des Fonctions Elliptiques"* de Briot (1817-1842) e Bouquet (1819-1885)[1] o que significa que Portugal não estava muito afastado da Matemática feita no resto da Europa. Nota-se, neste último trabalho, uma maior perfeição. No entanto, o objectivo destas duas obras era bastante distinto.

A tese *"Integraes e Funcções Ellípticas"* está dividida em duas partes. Na primeira, composta por cinco capítulos, o autor debruça-se sobre o estudo dos Integrais Elípticos; a segunda, composta por quatro capítulos, é dedicada às Funções Elípticas.
No início de cada capítulo podemos encontrar um resumo do que vai ser abordado.

Estas duas partes são precedidas de uma Introdução na qual A. Zeferino expõe a teoria das funções de variável complexa, às quais chama funções de variável imaginária, bem como a teoria dos integrais definidos destas funções entre limites complexos.

Na segunda parte deste capítulo, far-se-á uma análise da obra de Zeferino para que se possa perceber de que forma os conceitos, relativos a este tema, foram transmitidos e se o autor apresentou algo de novo no campo da teoria das Funções Elípticas.

No decorrer desta análise, sempre que possível, no final de cada capítulo, da obra de Zeferino, far-se-á uma comparação com a obra de Oskar Schloemilch[2] (1823-1901) *"Théorie des Intégrales et des Fonctions Elliptiques"*, traduzida do alemão por Joseph Graindorge, sendo ainda outras obras também referidas.

3.2 A análise da Obra

3.2.1 Introdução/Teoria das Funções de Variável Complexa

Antes de passar a expor o assunto Integrais e Funções Elípticas A. Zeferino, na introdução, faz uma breve alusão à análise complexa, abordando conceitos que permitirão uma maior compreensão de toda a teoria que será exposta na sua dissertação.

No decorrer da introdução o autor refere, inúmeras vezes, os trabalhos desenvolvidos por Cauchy[3] no campo da análise complexa. No entanto, nomes como os de Liouville (1809-1899), Hermite (1822-1901) e Neumann (1832-1925), também são citados.

A Introdução[4] encontra-se dividida em três partes: "Representação das variáveis complexas e das funções destas variáveis"; "Propriedades e distinções destas variáveis" e "Integrais definidos contendo funções complexas e tomados entre limites complexos".

O autor começa por referir que os números complexos da forma $z = x + iy$, onde $x, y \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$ (ou $i^2 = -1$)[5], não podem ser representados por um ponto movendo-se sobre uma recta fixa. Zeferino descreve[6] ainda, a representação dos números complexos, proposta por Cauchy, que classifica de elegante:

> " Se num plano fixo se traçarem dois eixos coordenados, e uma curva, cujas coordenadas correntes sejam os diversos valores attribuidos a *x* e *y*, a cada par de valores d'estas variaveis corresponderá um ponto d'essa curva, e por isso o ponto gerador d'ella representará a variável complexa em questão." (**[A46]**, p.3)

Repare-se que a representação descrita, pelo autor, é a representação usada para os números complexos nos nossos dias. De facto, um número complexo pode representar-se, relativamente a um sistema de coordenadas rectangulares num plano, por um ponto de coordenadas (x, y), onde o primeiro eixo de coordenadas (eixo dos *x*) toma o nome de eixo real e o segundo eixo (eixo dos *y*) se chama eixo imaginário. O plano denomina-se plano complexo.

Explica ainda que, um ponto que se encontre no eixo das abcissas corresponde a $y = 0$, sendo um valor real, e um ponto que se encontre no eixo das ordenadas corresponde a $x = 0$, sendo um valor imaginário. Define desta forma o que usualmente chamamos de Real e Imaginário Puro[7].

Para completar esta parte da introdução, o autor escreve um número complexo em coordenadas polares: $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$[8], onde ρ é o raio e φ o argumento ou amplitude[9] do número complexo, cujo valor principal pertence ao intervalo $-\pi, \pi$ (ou outro de amplitude 2π).

Ainda no que diz respeito à representação de um número complexo, em coordenadas polares, A. Zeferino tira a seguinte conclusão: " (...) a variável imaginária representa uma recta de grandeza e direcção determinadas, tirada pela origem para o ponto que na curva corresponde aos valores particulares dados a *x* e *y*." (**[A46]**, pp.3,4)

De facto, para a representação de um número complexo, em coordenadas polares, deverá ter-se em atenção dois factores: o raio r (ou ρ), designado por norma, módulo ou valor absoluto de *z*, determinado por $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e θ (ou φ), designado por amplitude do número complexo, dado por $\theta = \arg z$, como podemos observar na figura seguinte.

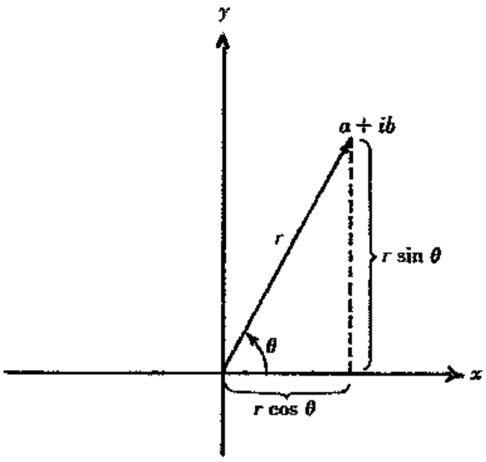


Figura 3.2.1: Representação de um número complexo em coordenadas polares

Dados os conceitos básicos, dos números complexos e sua representação, A. Zeferino vai enunciar algumas propriedades das variáveis complexas.

Começa então por citar uma propriedade importante das variáveis complexas, que distingue das variáveis reais: "(…) as variaveis imaginarias podem passar de um a outro valor determinado por uma infinidade de caminhos, correspondentes á infinidade de leis segundo as quaes se pode estabelecer a variação de x e de y." (**[A46]**, p.4)

De seguida o autor analisa o que se passa com as funções de variável complexa, começando por escrever que uma função de variável complexa é da forma $F(z) = F(x+iy)$, que poderá ser simplificada, obtendo-se $F(z) = F(x+iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, onde φ e ψ são funções de duas variáveis reais x e y.

Atenta ainda no facto de que a natureza da variável não determina a natureza da função, uma vez que podemos ter uma função complexa de variável real, ou uma função real de variável complexa.

No que diz respeito à representação gráfica destas funções, apresenta duas representações possíveis: uma primeira que consiste num ponto movendo-se num plano, e tendo por coordenadas $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$, e uma segunda que consiste em imaginar duas superfícies, cujas ordenadas sejam $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$.

Seguidamente A. Zeferino aborda o conceito de continuidade:

> " Quando para cada valor da variavel entre certos limites, o modulo ou a diferença $\Delta f(z) = f(z+\Delta z) - f(z)$ decresce indefinidamente com Δz, a funcção diz-se continua dentro dos limites considerados." (**[A46]**, p.5)

fazendo, mais uma vez, uma analogia com as funções reais de variável real.

Como se pode observar, na definição apresentada por A. Zeferino encontra-se a formulação matemática rigorosa do conceito intuitivo que actualmente temos de continuidade – a de uma *variação por graus insensíveis*. À diferença $\Delta f(z) = f(z+\Delta z) - f(z)$ dá-se o nome de diferença ou incremento da função no ponto *z*. Quando o autor refere que: "(…) decresce indefinidamente com Δz (…)" significa então que se a função é contínua no ponto *z*, a um incremento infinitésimo Δz da variável independente, nesse ponto corresponde para a função um incremento $\Delta f(z)$ infinitésimo com Δz.

A este aspecto analítico, da definição de continuidade, pode dar-se um outro mais simples:

Definição 3.2.1: Se $A \subset \mathbb{C}$ for um conjunto aberto e se $f : A \to \mathbb{C}$ for uma função, diz-se que *f* é <u>contínua</u> em $z_0 \in A$ se e só se $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ e que *f* é contínua em A se e só se é contínua para cada ponto z_0 em *A*.

Refere ainda que, caso seja adoptado o primeiro processo de representação[10], a função será contínua se através da continuidade da variável se puder concluir a continuidade da curva que representa a função.

Com base na teoria de que a mudança de valor da variável complexa pode fazer-se por uma infinidade de caminhos, mas que, a um determinado caminho da variável correspondem ou podem corresponder vários caminhos para a função, A. Zeferino define função monodroma[11] e função ambígua ou de muitas aceptações[12]:

> " Se, ficando a variável comprehendida numa certa porção do plano, a funcção adquire sempre o mesmo valor no mesmo ponto, qualquer que seja o caminho seguido para lá chegar, a funcção chama-se monodroma (…); se a cada valor da variavel correspondem diversos valores da funcção, esta chama-se ambigua ou de muitas accepções, (…)" (**[A46]**,p.6)

exemplificando[13] , logo de seguida.

Define também ponto de ramificação: “(…) a um certo ponto da curva que representa a variavel, corresponda tambem um ponto unico representando a funcção. (…) Esse ponto da curva que representa a variavel chama-se (…) *ponto de ramificação*” (**[A46]**, p.6). Mais adiante, Zeferino vai identificar estes pontos como sendo pontos singulares.

Tendo em consideração a definição de ponto de ramificação, faz referência à seguinte propriedade: “ (…) se a variavel descrever uma curva fechada, a funcção descreverá tambem uma ou muitas curvas fechadas, conforme for monodroma ou ambigua.” (**[A46]**, p.7), que deixará de se verificar caso a variável passe por um ponto de ramificação.

Outra propriedade importante das funções de variável complexa, uma vez que as distingue das funções de variável real, é a seguinte: “ As funcções de variavel real têm por derivada uma funcção monodroma tambem. Tal propriedade se não verifica, em geral, nas funcções de variavel imaginaria.” (**[A46]**, p.7). O autor passa de seguida a demonstrá-la, obtendo desta forma as Equações de Cauchy – Riemann.

Assim, sendo

$$u = f(z) = f(x+iy) = p+iq \text{ a função,}$$

a sua derivada

$$\frac{du}{dz} = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial q}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial p}{\partial y} + i\frac{\partial q}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx}}{1+i\frac{dy}{dx}}$$

depende, em geral, de $\frac{dy}{dx}$, que marca a direcção do deslocamento do ponto z no plano. Concluindo-se, deste modo, que $\frac{du}{dz}$ é, em geral, uma função ambígua.

No entanto, se p e q variarem com x e y de modo a verificar a condição:

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} = i\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y}\right)$$

ou equivalentemente

$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y}$; $\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y}$ (designadas por Equações de Cauchy–Riemann[14]), a derivada será independente de $\frac{dy}{dx}$ e portanto monodroma.

Terminada a demonstração define função monógena referindo, mais uma vez, o nome de Cauchy: “ Cauchy chamou monogenas às funcções que gozam da propriedade de terem por derivadas funcções monodromas, ou de terem derivada unica em cada ponto.” (**[A46]**, p.8).

Definição que, actualmente, se traduz da seguinte forma:

Definição 3.2.2: Se $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe e é único em todo o caminho do plano complexo, então *f(z)* é dita <u>monógena</u> em z_0.

Com base nas equações de Cauchy – Riemann Zeferino deduz o seguinte:

Se

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

ter-se-á também

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = 0$$

donde

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \text{ em que } p \text{ e } q \text{ não podem ser arbitrários.}$$

O que o autor obtém é a função harmónica conjugada de *u*, como se pode observar na seguinte definição.

Definição 3.2.3: Seja U um aberto de $\mathbb{R}^2$. Uma função $f : U \to \mathbb{R}$ diz-se <u>harmónica</u> se for de classe C^2 e se $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ [15].

Se duas funções harmónicas *u* e *v* satisfazem as equações de Cauchy – Riemann, então *v* é a função harmónica conjugada de *u*.

Ainda no que se refere às Equações de Cauchy – Riemann A. Zeferino faz uma descrição geométrica, segundo ele de fácil compreensão, e que passamos a citar:

> " A condição (2)[16] (…) indica que, fazendo gyrar de 90º uma das superficies, cujas ordenadas verticaes são *p* e *q*, em torno de uma vertical qualquer, e do eixo dos *x* para o dos *y*, o plano tangente d'essa superficie no ponto situado sobre essa vertical se torna parallelo ao plano tangente á outra superficie no ponto correspondente. D'onde legitimamente se conlue que, tirados por uma vertical qualquer dois planos comprehendendo um angulo recto, as suas intercessões com as superficies tem por tangentes rectas que fazem angulos eguaes com a vertical.
>
> Considerando o outro modo de representação (…) significa que as curvas descriptas pelo ponto *u* fazem entre si angulos eguaes aos das curvas descriptas pelo ponto *z*" (**[A46]**, pp.8,9)

Antes de passar ao estudo dos integrais definidos das funções complexas, Zeferino define função analítica[17] do seguinte modo: " (…) denominou *synectica* entre certos limites a funcção que se conserva *finita*, *continua*, *monodroma* e *monogenea* dentro d'esses limites (…)"(**[A46]**, p.9). Esta definição, como podemos observar, é semelhante à dos nossos dias:

Definição 3.2.4: Uma função complexa *f(z)* diz-se <u>analítica</u> na região *A* se está definida e tem derivada em cada ponto de *A*.

Uma função que está definida e é analítica em todo o plano □ é dita inteira.

O autor dá ainda as definições de ponto singular e ponto crítico, para que se possa compreender melhor o que vai ser exposto a seguir. Assim, chama pontos singulares aos pontos de ramificação[18] e pontos críticos aos pontos de excepção que, segundo Schloemilch, se definem da seguinte forma: "Os pontos nos quaes a funcção se torna *asynectica* por ser *infinita* ou *discontinua* foram chamados (…) pontos de *excepção*" (**[A46]**, p.9).

De facto, temos:

Definição 3.2.5: Se f é analítica nalguma vizinhança de z_0, excepto no próprio ponto z_0, diz-se que z_0 é um ponto singular isolado da função f.

Em particular:

i) z_0 é singularidade removível se $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \neq \infty$;

ii) z_0 é pólo se $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$; mais precisamente será um pólo de ordem n se existir um inteiro n>0 tal que $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0, \infty$ (pólo simples se n=1);

iii) z_0 é uma singularidade essencial se *f(z)* não tem limite (finito ou infinito) quando $z \to z_0$.

Definição 3.2.6: Seja $f : D \to \square$ derivável no domínio. Um ponto crítico de f é um ponto $z \in D$ tal que $f'(z) = 0$.

No que diz respeito aos integrais definidos entre limites complexos, o autor começa por dizer que, estes têm a mesma definição dos integrais que são tomados entre limites reais[19], isto é:

Definição 3.2.7: Integral de f ao longo de relativamente a z é o integral $\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b f\ \gamma(t)\ \frac{d\gamma}{dt}dt$, onde $\gamma :\ a,b\ \to \square$ é uma parametrização de Γ.

António Zeferino passa, de seguida, a explicar e a demonstrar que: "(…) um integral definido entre limites imaginarios e contendo uma funcção synectica entre esses limites, é independente do caminho de integração." (**[A46]**, p.11).

Para demonstrar esta propriedade considera a seguinte figura:

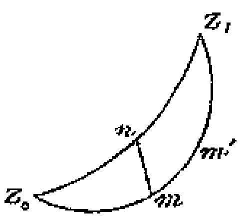


Figura 3.2.2 (**[A46]**, p.109).

Considerando o integral $\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz$, vai analisar o que se passa com a variação do mesmo, quando se substitui o caminho Z_0nZ_1, percorrido pela variável, por um outro como $Z_0mm'Z_1$, infinitamente próximo do primeiro. Supondo ainda que a cada ponto da primeira curva corresponde um ponto da segunda, e sendo *m* e *n* dois pontos correspondentes, observa-se, pelo facto de *f* ser analítica, que esta toma o mesmo valor em *n*, quer siga o caminho Z_0mn ou Z_0n. A diferença entre o valor da função em *m*, seguindo o primeiro caminho e em *n*, seguindo o segundo caminho, é dada pela variação correspondente ao caminho *mn*, $\delta f(z)$.

A. Zeferino refere ainda que a função, pelo facto de ser monógena, terá a mesma derivada no mesmo ponto, qualquer que seja o caminho seguido, logo: $\delta f(z)dz = df(z)\delta z$[20].

Tendo em conta que $\delta z_0 = \delta z_1 = 0$, conclui-se que:

$$\begin{aligned}
\delta \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz &= \int_{z_0}^{z_1} \delta f(z)dz + f(z)\delta dz = \\
&= \int_{z_0}^{z_1} d \quad f(z)\delta z = \\
&= \quad f(z)\delta z \Big|_{z_0}^{z_1} = 0.
\end{aligned}$$

A partir desta propriedade refere dois corolários, que constituem o que actualmente designamos por Teorema de Cauchy e uma consequência deste.

Teorema de Cauchy: Se *f* é analítica, com derivada contínua e limitada por uma curva fechada . Então $\int_\gamma f = 0$.

Dem: Uma demonstração deste Teorema encontra-se, por exemplo, em [**A41**], p.122.

Teorema 3.2.1: Seja *f(z)* uma função analítica numa região limitada por duas curvas simples fechadas γ e γ_1 e sobre elas. Então $\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$.

Dem: Uma demonstração deste resultado encontra-se, por exemplo, em [**A57**], p.163.

Para terminar, a introdução, o autor analisa o que acontece quando a curva, ao longo da qual se faz a integração, contém um ou mais pontos críticos.

Começa por demonstrar a seguinte propriedade:

> “ O integral definido, contendo uma funcção synectica, tomado entre limites imaginarios, e correspondendo a uma curva que involve um ponto de excepção, póde substituir-se por outro qualquer que involva esse ponto, comtanto que a funcção se conserve synectica em ambos elles, e na porção do plano que elles comprehendem.” (**[A46]**, p.13).

Como suporte à sua demonstração, considera a seguinte figura:

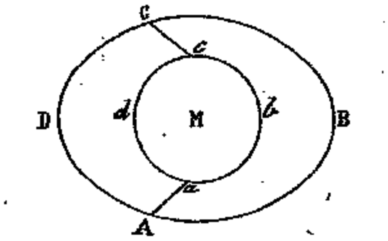


Figura 3.2.3 (**[A46]**, p.109).

Começa por supor que na porção do plano considerada existe um ponto de excepção, *M*, sendo *ABCD* o caminho de integração considerado. De seguida, propõe que se considere um outro caminho qualquer como *abcd*. Se unirmos *A* e *a*, *C* e *c*, pelas rectas *Aa* e *Cc* observamos que, o caminho *ABCcbaA* pode ser substituído por *ADCcdaA*, uma vez que estes não contêm o ponto considerado. Para dar uma ideia de como Zeferino Cândido realiza uma demonstração, repetimos em seguida o seu raciocínio.

Assim, temos:

$$\int ABCcbaA = \int ADCcdaA$$

o que é equivalente a:

$$\int ABC + \int Cc + \int cba + \int aA = \int ADC + \int Cc + \int cda + \int aA$$

que, simplificando, vem:

$$\int ABC - \int ADC = \int cda - \int cba\ .$$

Atendendo a que

$$\int ADC = -\int CDA \text{ e } \int cba = -\int abc$$

obtém-se

$$\int ABC + \int CDA = \int cda + \int abc$$

ou seja

$$\int ABCDA = \int abcda\,.$$

Demonstrada a propriedade o autor passa a descrever o que actualmente chamamos de Teorema dos Resíduos.

Teorema dos Resíduos: Seja f analítica no domínio G, sejam $a_1, a_2, ..., a_m$ singularidades isoladas de f e seja γ um caminho fechado em G, tal que $\forall_{u\notin G\cup\ a_1,...,a_m}\ n(\gamma,u)=0$. Então

$$\int_\gamma f = 2\pi i\cdot\sum_{j=1}^{m}\left[n(\gamma,a_j)\operatorname{Re}s(f,a_j)\right],$$

onde $\operatorname{Re}s(f,a_j)$ [21] é o resíduo de *f* em a_j e $n(\gamma,a_j)$ [22] é o índice, isto é o número de curvas que envolvem o ponto a_j.

Dem: Uma demonstração do Teorema dos Resíduos encontra-se, por exemplo, em [**A41**], p.284.

Vejamos agora a descrição feita pelo autor.

Começa por nos apresentar o integral correspondente ao círculo descrito em torno do ponto crítico, ou ponto singular, em coordenadas polares:

$$i\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} f\ \ a+ib+re^{i\varphi}\ \ re^{i\varphi}d\varphi,$$

sendo (a,b) as coordenadas do ponto crítico e φ_0 o valor inicial do ângulo φ.

Supondo ainda que o raio é infinitamente pequeno e que λ, independente de φ, é o valor da função para o valor do raio, expõe de seguida o que acontece:

- No caso de haver um único ponto crítico

$$\int_1 f(z)dz = 2i\pi\lambda$$

- Caso existam *n* pontos críticos na curva de integração

$$\int_n f(z)dz = 2i\pi(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)$$

- No caso em que a curva envolve *n* vezes o mesmo ponto crítico

$$\int_1^n f(z)dz = \pm 2ni\pi\lambda$$

- Considerando diferentes pontos e várias revoluções em torno de cada um, entre os limites z_0 e z_1

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = 2i\pi \quad \pm n_1\lambda_1 \pm \ldots \pm n_p\lambda_p$$

Para finalizar, é explicado ao leitor o que acontecerá no caso da curva de integração passar por um ponto crítico não sendo, portanto, uma curva fechada. Neste caso ter-se-ia:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = \int\Big|_{z_0}^{z_1} f(z)dz + 2i\pi \quad \pm n_1\lambda_1 \pm \ldots \pm n_p\lambda_p \quad ,$$

onde

$\int\Big|_{z_0}^{z_1} f(z)dz$ representa, segundo a notação de Schloemilch, o integral linear. Este integral corresponde ao caminho rectilíneo entre os dois pontos limites.

O livro *"Théorie des Intégrales et des fonctions Elliptiques"*, tradução do livro em alemão de Oskar Schloemilch, no qual se encontra uma introdução sobre a teoria das Funções de Variável Complexa, da autoria do tradutor Joseph Graindorge, parece ter servido de inspiração ao trabalho de A. Zeferino, que se preocupou em retirar da introdução o que era necessário para a compreensão da teoria dos Integrais e Funções Elípticas, exposta nas primeira e segunda partes da sua dissertação.

Em comparação com a obra atrás citada o autor pouco ou nada adianta, sendo apenas de salientar a descrição da representação das equações de Cauchy – Riemann, que não é feita no trabalho de Graindorge [23].

Ainda no que se refere às equações de Cauchy-Riemann, embora não tenha sido utilizado o símbolo de derivada parcial, Graindorge refere na sua obra que, as derivadas em questão são derivadas parciais, no entanto A. Zeferino omite essa informação.

Outro aspecto a realçar é o uso do *"i"* em vez de $\sqrt{-1}$ que, em comparação com a obra atrás citada, resulta numa simplificação da escrita por parte de Zeferino.

No que se refere à restante exposição A. Zeferino limita-se a fazer uma tradução para o português omitindo, muitas vezes, algumas partes que contribuiriam para uma melhor compreensão do trabalho. É este o método adoptado em toda a sua dissertação.

O facto de não haver referência, na dissertação de Zeferino, ao trabalho de Schloemilch, reflecte o que na altura era comum em obras deste tipo. Muitas das traduções eram obtidas de livros estrangeiros, sobretudo franceses. Em muitos casos estas traduções eram livres e baseadas em mais do que uma fonte, omitindo e adicionando material de forma a satisfazer as suas necessidades. Este tipo de procedimento não era exclusivamente característico de Portugal, uma vez que, também se verificava em outros países.

3.2.2 Primeira Parte/Integrais Elípticos

No Capítulo I A. Zeferino começa por definir Integral Elíptico $\int\frac{F(x)dx}{\sqrt{X}}$[24], onde X é um polinómio do quarto grau em x e $F(x)$ é uma função algébrica racional, deduzindo de seguida os Integrais Elípticos das três espécies na forma de Legendre. Zeferino explica, neste capítulo, o método para suprimir as potências ímpares do radicando, contudo não refere que o vai fazer. Esta transformação vai ser feita para que se possa substituir o integral geral por outros da mesma espécie, mas mais simples. Assim, começa por considerar um polinómio do quarto grau:

$$X = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 ,$$

tendo como raízes a_1, a_2, a_3, a_4, que factorizando fica :

$$X = A_4(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4) .$$

A partir daqui vai provar que este se pode escrever, como um polinómio de grau quatro, contendo somente potências pares de x. Para esse efeito, procede a uma mudança de variável, através da transformação homográfica[25]: $x = \frac{p+qy}{1+y}$, onde p e q são constantes. Esta mudança de variável vai permitir transformar o polinómio X, em potências pares da variável e com valores reais p e q, obtendo-se:

$$X = A_4 \frac{(p-a_1)(p-a_2)+(q-a_1)(q-a_2)y^2 \quad (p-a_3)(p-a_4)+(q-a_3)(q-a_4)y^2}{(1+y)^4}.$$

De seguida, Zeferino passa a determinar os valores de p e q:

> "determinando p e q pelas condições
>
> $$\left.\begin{array}{l}(p-a_1)(q-a_2)+(p-a_2)(q-a_1)=0\\(p-a_3)(q-a_4)+(p-a_4)(q-a_3)=0\end{array}\right\}$$
>
> condições que conduzem sempre a valores reaes de *p* e *q*." (**[A46]**, p.20)

No entanto, o autor não explica porque considera as igualdades. Seria portanto pertinente que este explicasse que estava a reduzir o polinómio X apenas a termos de ordem par, pelo que os coeficientes dos termos em y seriam iguais a zero.

António Zeferino prossegue escrevendo uma equação, do segundo grau, cujas raízes são p e q. Sabendo que o coeficiente do termo de ordem um é o simétrico da soma das soluções e que o termo independente é o produto das soluções, obtém:

$$z^2 - \underbrace{\frac{2(a_1a_2-a_3a_4)}{(a_1+a_2)-(a_3-a_4)}}_{p+q} z + \underbrace{\frac{a_1a_2(a_3+a_4)-a_3a_4(a_1+a_2)}{(a_1+a_2)-(a_3+a_4)}}_{pq} = 0. \qquad \textbf{(1)}$$

Com efeito, atendendo à definição de binómio discriminante[26], vai provar que **(1)** tem sempre solução recorrendo à desigualdade seguinte: $pq < \frac{1}{4}(p+q)^2$. Procedendo a várias substituições e simplificações, obtém: $\frac{(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_2-a_3)(a_2-a_4)}{a_1+a_2-(a_3+a_4)^{\;2}} > 0$.

É então que o autor passa a mostrar que, qualquer que seja a natureza das raízes daquela equação, esta desigualdade é sempre verdadeira e $p+q$ e $p \times q$ são reais. Para esse efeito, analisa três casos possíveis: as quatro raízes são reais; duas raízes são reais e duas são complexas e por último as quatro raízes são complexas.

Chama ainda a atenção para o facto de: se $a_1+a_2=a_3+a_4$ ou $a_1=a_3$ e $a_2=a_4$, estas igualdades irão fazer com que $p+q$ seja infinito e $p \times q$ seja indeterminada. Para salvaguardar estes casos, sugere que se faça a seguinte mudança de variável: $x = y + \frac{a_1+a_2}{2}$. Esta vai reduzir o polinómio à forma esperada, na primeira hipótese e elimina o radical, na segunda hipótese. No entanto, apenas faz esta observação, não mostrando o que se obteria. De facto, se efectuarmos a mudança de variável referida, obter-se-á depois de vários cálculos:

$$X = A_4\left(y^4 - \left(\frac{(a_4-a_3)^2}{4} + \frac{(a_1-a_3)^2}{4} \right) y^2 + \frac{(a_1-a_3)(a_4-a_3)}{16} \right)$$

e

$$X = A_4\left(y^2 - \frac{(a_4-a_3)^2}{4} \right)^2$$ para a primeira e segunda hipótese, respectivamente.

Resumindo, A. Zeferino conclui que todo o integral da forma $\int \frac{F(x)dx}{\sqrt{X}}$ pode sempre reduzir-se a $\int \frac{F(x)dx}{\sqrt{X'}}$, sendo X' um polinómio do quarto grau da forma $X' = a + bx^2 + cx^4$ ou da forma $X = \frac{M}{(1+y)^4}$, onde

$$M = A_4(q-a_1)(q-a_2)(q-a_3)(q-a_4) \times \left[\frac{(p-a_1)(p-a_2)}{(q-a_1)(q-a_2)} + y^2 \right]\left[\frac{(p-a_3)(p-a_4)}{(q-a_3)(q-a_4)} + y^2 \right].$$

Depois de explicar a redução de um polinómio do quarto grau, a um polinómio constituído por potências pares da variável, passa a analisar a função $F(x)$, que deverá ser uma função par[27]. Com esse fim, começa por supor que a paridade não se verifica, passando a explicar como se deveria proceder nestes casos. Para o mostrar, considera a função:

$$F(x) = \frac{\varphi(x) + x\psi(x)}{f_1(x) + xf_2(x)},$$ sendo φ, ψ, f_1 e f_2 funções pares.

Multiplicando ambos os termos da fracção anterior por $f_1(x) - xf_2(x)$[28] vem:

$$F(x) = \frac{[\varphi(x) + x\psi(x)][f_1(x) - xf_2(x)]}{[f_1(x)]^2 - x^2[f_2(x)]^2},$$

obtendo portanto, uma função cujo denominador só tem potências pares da variável, tendo o numerador potências pares e ímpares. Assim, passa a escrever $F(x)$ da seguinte forma:

$$F(x) = \frac{M}{P} + \frac{N}{P}x,$$ sendo M, N e P funções pares

ou mais simplesmente

$$F(x) = \phi(x^2) + x\psi(x^2)\ , \qquad \textbf{(2)}$$

onde ϕ e ψ funções racionais fraccionárias em x.

Não esquecendo que o objectivo deste capítulo é apresentar as três espécies de Integrais Elípticos, A. Zeferino debruça-se, a partir do momento em que obtém a função escrita na forma **(2)**, sobre o estudo de:

$$\int \frac{F(x)}{\sqrt{X}}dx = \int \frac{\phi(x^2)}{\sqrt{X}}dx + \int \frac{x\psi(x^2)}{\sqrt{X}}dx\ .$$

Sabemos que se se fizer no segundo integral, do segundo membro, a mudança de variável $x^2 = t$, este se transforma numa expressão facilmente integrável. Com efeito, o estudo recai sobre o integral $\int \frac{\phi(x^2)}{\sqrt{X}}dx$, que é precisamente o integral que se pretendia estudar, mas onde a função é par.

Assim, escreve:

> " Occupemo-nos portanto da expressão
>
> $\int \frac{F(x^2)}{\sqrt{X}}dx$ " (**[A46]**, p.27).

Voltando atrás, recorda que aplicando a transformação homográfica $x = \frac{p+qy}{1+y}$ se tem $X = \frac{n(y^2-r)(y^2-s)}{(1+y)^4}$, onde $n = A_4(q-a_1)(q-a_2)(q-a_3)(q-a_4)$; $r = -\frac{(p-a_1)(p-a_2)}{(q-a_1)(q-a_2)}$ e $s = -\frac{(p-a_3)(p-a_4)}{(q-a_3)(q-a_4)}$. Fazendo ainda, $F(x^2) = \phi(y^2)$ e derivando $x = \frac{p+qy}{1+y}$ em ordem a y $\left(dx = \frac{(q-p)dy}{(1+y)^2} \right)$, obtém:

$$\int \frac{F(x^2)}{\sqrt{X}}dx = (q-p)\int \frac{\phi(y^2)dy}{\sqrt{n(y^2-r)(y^2-s)}}\ .$$

Atenta ainda, no facto de $\phi(y^2)$ se poder sempre transformar numa função inteira e numa fracção que se decomporá em fracções parciais da forma: $\frac{A}{1+\lambda y^2\ {}^{p}}$. No entanto, Zeferino não identifica o que é A e de que natureza são o p e λ, mais uma vez "peca" pela pouca informação que dá ao leitor.

Conclui ainda que, $\int \frac{F(x)dx}{\sqrt{X}}$ se pode reduzir a três grupos de integrais distintos: uns que se obtêm pelas formas conhecidas[29]; outros da forma $\int \frac{y^m dy}{\sqrt{n(y^2-r)(y^2-s)}}$, **(3)**

sendo m número par; e por último, os da forma $\int \frac{dy}{1+\lambda y^2 \; ^{p} \sqrt{n(y^2-r)(y^2-s)}}$. **(4)**

Numa passagem muito rápida, deduz que os integrais da forma $\int \frac{dy}{\sqrt{n(y^2-r)(y^2-s)}}$ se reduzem a $C\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$, onde k e z são fracções positivas. Zeferino informa ainda o leitor que a fórmula, que exprime y em z, foi obtida a partir de $y^2 = \frac{a+bz^2}{c+dz^2}$.

Conclui então que os integrais **(3)** e **(4)**, se reduzem a: $\int \frac{z^m dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$ e $\int \frac{dz}{1+\lambda z^2 \; ^{p} \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$, respectivamente e que, na sua forma trigonométrica, considerando $z = \sin\varphi$ e $\Delta(\varphi) = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$, se tem:

$$U_m = \int \frac{\sin^m \varphi d\varphi}{\Delta\varphi} \text{ e } V_n = \int \frac{d\varphi}{1+\lambda \sin^2\varphi \; ^{n} \Delta\varphi}.$$

De um modo muito superficial, mostra como se podem reduzir todos os integrais da forma U_m, aos dois: $\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ e $\int \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\Delta\varphi}$. Seguidamente conclui ainda que, o segundo integral, $\int \frac{\sin^2\varphi d\varphi}{\Delta\varphi}$, ainda é redutível às formas $\int \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ e $\int \Delta\varphi d\varphi$, uma vez que $\frac{\sin^2\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1}{k^2}\left[\frac{1}{\Delta\varphi} - \Delta\varphi\right]$.

Mas vejamos como A. Zeferino chega às duas primeiras formas. Começando por considerar

$$\sin^{m-3}\varphi\cos\varphi\Delta\varphi,$$

derivando, obtém-se:

$$d\left[\sin^{m-3}\varphi\cos\varphi\Delta\varphi\right]=\left[(m-3)\sin^{m-4}\varphi\cos^2\varphi-\sin^{m-2}\varphi\right]\Delta\varphi-\frac{x^2\sin^{m-2}\cos^2\varphi}{\Delta\varphi}d\varphi=$$

$$=(m-3)\frac{\sin^{m-4}}{\Delta\varphi}-(m-2)(1+x^2)\frac{\sin^{m-2}\varphi}{\Delta\varphi}d\varphi+(m-1)x^2\frac{\sin^m}{\Delta\varphi}d\varphi$$

procedendo a uma integração, resulta:

$$\sin^{m-3}\varphi\cos\varphi\Delta\varphi=(m-3)U_{m-4}-(m-2)(1+x^2)U_{m-2}+(m-1)x^2U_m\,.$$

Daqui conclui-se que, como U_m se pode deduzir de U_{m-2} e U_{m-4}, para m=4, 6, 8, …, então ter-se-á: $U_4, U_6, U_8, \ldots$ expressas a partir de $U_0=\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ e $U_2=\int\frac{\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}d\varphi$.

Mostra, igualmente, como é que os integrais da forma V_n se podem reduzir aos três seguintes:

$$\int\frac{1+\lambda\sin^2\varphi}{\Delta\varphi}d\varphi,\ \int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}\ \text{e}\ \int\frac{d\varphi}{1+\lambda\sin^2\varphi\ \ \Delta\varphi}.$$

No entanto, limita-se a apresentar a fórmula final que leva a esta conclusão, omitindo como se chega até ela.

Para finalizar refere que todo o integral da forma $\int\frac{F(x)dx}{\sqrt{X}}$ origina, para além das formas já conhecidas, três novas formas que se podem reduzir às primeiras,

$$\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},\ \int\Delta\varphi d\varphi\ \text{e}\ \int\frac{d\varphi}{1+\lambda\sin^2\varphi\ \ \Delta\varphi}.$$

Estes integrais, quando tomados entre limites determinados, designam-se por Integrais Elípticos de primeira, segunda e terceira espécie, respectivamente.

Apresenta ainda os três integrais anteriores escritos, segundo a notação de Legendre (1752-1833), da seguinte forma[30]:

$$F(k,\varphi)=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},\ E(k,\varphi)=\int_0^\varphi\Delta\varphi d\varphi\ \text{e}\ \Pi_0(k,\lambda,\varphi)=\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{(1+\lambda\sin^2\varphi)\Delta\varphi},$$

onde k é o módulo, φ a amplitude e λ o parâmetro destes integrais.

Passemos de seguida, à comparação com a obra *"Théorie des Intégrales et des Fonctions Elliptiques"*. Podemos observar que Schloemilch teve ainda a preocupação de mostrar como, a partir dos Integrais Elípticos de primeira e segunda espécie, se podem escrever equações, como por exemplo: $\int_0^{\varphi} \frac{\sin^2\varphi}{\Delta} = \frac{F-E}{x^2}$, onde $F = F(x,\varphi)$, $E = E(x,\varphi)$ e $\Delta = \Delta(\varphi)$. Outro aspecto importante a realçar é o cálculo de $\frac{dE}{dx}$ $\left(\frac{dE}{dx} = -x\int_0^{\varphi} \frac{\sin^2\varphi}{\Delta} d\varphi\right)$ e de $\frac{dF}{dx}$ $\left[\frac{dF}{dx} = \frac{1}{1-x^2}\left(\frac{E-(1-x^2)F}{x} - \frac{x\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta}\right)\right]$.

Legendre, para facilitar o cálculo dos Integrais Elípticos construiu tábuas, são estas tábuas, que vão ser alvo de estudo no capítulo seguinte de *"Integraes e Funcções Ellipticas"*.

> " São novos elementos de calculo, de ordem mais elevada, transcendentes novas, que se podem affectar de características proprias para lhes simplificar a notação, e cujos valores numericos se devem determinar construindo-se táboas com argumentos convenientes, que sirvam para o seu cálculo em geral, do mesmo modo que se procedeu para os logaritmos, senos, etc." (**[A46]**, p.33)

António Zeferino inicia o segundo capítulo fazendo referência, mais uma vez, ao trabalho de Legendre, o que faz sentido, uma vez que este foi o criador das tábuas para o cálculo dos Integrais Elípticos. Estas tábuas, tal como o autor explica, servem para o cálculo numérico dos Integrais Elípticos quando conhecido o seu módulo e a sua amplitude. Contudo tal não é aplicável aos integrais de terceira espécie[31], porque nestes constam três variáveis e seriam, desta forma, necessárias tábuas com três entradas, o que é impossível.

Para analisar o caso dos integrais de primeira espécie, Zeferino demonstra a seguinte propriedade:

> " Todo o integral elliptico de primeira espécie póde exprimir-se n´outro da mesma espécie, mas de modulo maior e de amplitude menor; e vice-versa." (**[A46]**, p.35)

utilizando, na sua prova, uma das transformações de Landen[32] (1719-1790). Mas vejamos como procedeu.

Tendo em consideração o integral $F(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$, de primeira espécie, faz a seguinte substituição de Landen $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\sin 2w}{k+\cos 2w}$ ou, equivalentemente, $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin 2w}{k+\cos 2w}$. Feita esta substituição, obtém $F(k,\varphi)=\frac{2}{1+k}\int_0^{w}\frac{dw}{\sqrt{1-k'^2\sin^2 w}}$ ou, de uma forma mais simplificada, $F(k,\varphi)=\frac{2}{1+k}F(k',w)$, sendo os módulos e as amplitudes ligados pelas relações $k'=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$ e $\sin(2w-\varphi)=k\sin\varphi$, onde $k'>k$ e $w<\varphi$ porque $k<1$.

Demonstrada a primeira parte do teorema, Zeferino prova a segunda parte, ou seja: que todo o Integral Elíptico de primeira espécie se pode exprimir noutro da mesma espécie mas de módulo menor e amplitude maior.

Esta segunda parte, como o autor refere, é uma consequência da primeira. Assim, considerando a equação $F(k,\varphi)=\frac{2}{1+k}F(k',w)$, obtém-se $F(k',w)=\frac{1+k}{2}F(k,\varphi)$ e de $k'=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$ vem, facilmente, $k=\frac{1-\sqrt{1-k'^2}}{1+\sqrt{1-k'^2}}$. Combinando $F(k',w)$ e k com $sen(2w-\varphi)=ksen\varphi$, fica provada a segunda parte da propriedade.

Provada a propriedade, Zeferino passa a explicar dois processos para o cálculo de um integral de primeira espécie, que resultam desta.

> "Este theorema fornece dois processos (...) Consistindo um no decrescimento sucessivo das amplitudes, e augmento dos modulos, que tem por limite superior a unidade; outro, ao contrário, no decrescimento continuado dos modulos e diminuição das amplitudes, fazendo convergir aquelles para o seu limite inferior zero" [33] (**[A46]**, p.37)

Vejamos como procede para o primeiro processo. Parte do pressuposto que o integral depende de $F(1,\varphi)=\int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}=\int_0^{\psi}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\psi\right)$[34]. Para chegar a esta conclusão, começa por considerar uma série de módulos crescentes $k, k_1,...$ e ao mesmo tempo uma série de amplitudes decrescentes $\varphi,\varphi_1,\varphi_2,...$.

Aplicando a fórmula $F(k,\varphi)=\frac{2}{1+k}F(k',w)$ n vezes, resulta

$$F(k,\varphi)=\frac{2}{1+k}\cdot\frac{2}{1+k_1}\cdot...\cdot\frac{2}{1+k_{n-1}}F(k_n,\varphi_n)\,.$$

Sendo os módulos calculados pelas relações:

$$\frac{2}{1+k}=\frac{k_1}{\sqrt{k}},\qquad \frac{2}{1+k_1}=\frac{k_2}{\sqrt{k_1}},\ ...,\frac{2}{1+k_{n-1}}=\frac{k_n}{\sqrt{k_{n-1}}}\,,$$

e as amplitudes pelas seguintes relações:

$$\sin(2w-\varphi)=k\sin\varphi;\quad \sin(2w-\varphi_1)=k_1\sin\varphi_1,...\,,$$

obtém-se $F(k,\varphi)=k_n\sqrt{\frac{k_1k_2k_3...k_{n-1}}{k}}F(k_n,\varphi_n)$. Refira-se, no entanto, que isto teria ficado mais completo e explícito caso o autor tivesse, tal como fez Schloemilch ([**A31**]), indicado que $k_v=\frac{2\sqrt{k_{v-1}}}{1+k_{v-1}}$ e $\sin(2\varphi_v-\varphi_{v-1})=k_{v-1}\sin\varphi_{v-1}$ $(v=1,2,...;\quad k_0=k;\quad \varphi_0=\varphi)$.

Tudo isto mostra que a fórmula a aplicar no cálculo numérico de $F(k,\varphi)$, supondo $k_n=1$ e $\varphi_n=\psi$, é

$$F(k,\varphi)=k_n\sqrt{\frac{k_1k_2k_3...k_{n-1}}{k}}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\psi}{2}\right).$$

Mais uma vez se regista omissão de informação. Talvez tivesse sido interessante, e permitisse uma melhor compreensão, se Zeferino explicasse a razão de $k_n=1$ e de $\varphi_n=\psi$, como Schloemilch ([**A31**]). De facto, considerando que os módulos crescem continuadamente, k_n deverá convergir para um determinado limite inferior ou igual a um. Este limite pode ser encontrado, através da relação $k_{n+1}=\frac{2\sqrt{k_n}}{1+k_n}$, que é equivalente a

$\dfrac{1-k_{n+1}}{1-k_n}=\dfrac{1-\sqrt{k_n}}{1+\sqrt{k_n}}\cdot\dfrac{1}{1+k_n}$ e como tal, $\lim\dfrac{1-k_{n+1}}{1-k_n}<1$. Por outro lado, como $\lim(1-k_n)=0$, concluímos que $\lim k_n=1$. No que se refere às amplitudes, como estas decrescem continuadamente, sem serem negativas, $\lim\varphi_n=\varphi$ (finito), daí que $k_n=1$ e $\varphi_n=\psi$. Assim, conclui-se que: $\lim F(k_n,\varphi_n)=\int_0^{\psi}\dfrac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}=\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{4}\pi+\dfrac{1}{2}\psi\right)$.

De modo análogo Zeferino conclui que, pelo segundo processo, o valor do integral de primeira espécie depende do valor de $\int_0^{\psi}d\varphi=\psi$.

Depois de considerar $F(k,\varphi)=\dfrac{1+k}{2}\cdot\dfrac{1+k_1}{2}\cdot\ldots\cdot\dfrac{1+k_{n-1}}{2}F(k_n,\varphi_n)$ e tendo em atenção os limites de k e φ, $k_n=0$ e $\varphi_n=\psi$, obtém:

$$F(k,\varphi)=\frac{\psi}{2^n}(1+k_1)(1+k_2)\ldots(1+k_n)\ .$$

Tal como se verificou no processo anterior, também neste, A. Zeferino não explica porque razão $k_n=0$ e $\varphi_n=\psi$. Mas, o valor limite para o qual k_n converge por decrescimento obtém-se observando que

$$\frac{k_{n+1}}{k_n}=\frac{1-\sqrt{1-k_n^2}}{k_n\ \ 1+\sqrt{1-k_n^2}}=\frac{k_n}{1+\sqrt{1-k_n^2}\ \ ^2}\ ,$$

donde $\lim\dfrac{k_{n+1}}{k_n}<1$ e consequentemente $\lim k_n=0$. Daí que resulte:

$$\lim\frac{F(k_n,\varphi_n)}{2^n}=\lim\int_0^{\varphi_n}\frac{d\varphi}{2^n\sqrt{1-k_n^2\sin^2\varphi}}=\lim\int_0^{\varphi_n}\frac{d\varphi}{2^n}=\lim\frac{\varphi_n}{2^n}=\varphi\ .$$

Como é óbvio, não é indiferente a aplicação de um ou outro processo. Dever-se-á aplicar o primeiro caso o módulo esteja compreendido entre $\dfrac{1}{2}$ e 1, e o segundo no caso do módulo estar compreendido entre 0 e $\dfrac{1}{2}$.

Seguidamente o autor transcreve, do trabalho de Oskar Schloemilch, um exemplo numérico, onde o $k=\frac{24}{25}$ e $\varphi=\frac{1}{3}\pi=60^{o}$, e que na sua opinião serve para esclarecer o que foi explicado antes. No entanto, não explica todo o processo de resolução alegando que este se resume a simples cálculos. Refira-se que o processo a aplicar é o primeiro, uma vez que $\frac{1}{2}<k<1$[35].

Terminado o caso dos integrais de primeira espécie, A. Zeferino passa a estudar o que acontece com os integrais de segunda espécie. De uma forma análoga à que foi usada para a propriedade anterior[36], começa por demonstrar a seguinte propriedade: “ (…) todo o integral elliptico de primeira especie póde ser reduzido a dois integraes de segunda; (…) e um integral elliptico de segunda especie póde ser expresso n´um de primeira, e n´um de segunda de modulo maior e amplitude menor, ou vice-versa, (…)”(**[A46]**, p.43)

Seguidamente vamos ver como Zeferino prova a propriedade, enunciada acima, referente aos Integrais Elípticos de segunda espécie: $E(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$.

Considerando a mesma substituição de Landen aplicada aos Integrais Elípticos de primeira espécie e adicionando a ambos os membros $ksen\varphi=\int_0^{\varphi}k\cos\varphi d\varphi$, obtém:

$$
\begin{aligned}
E(k,\varphi)+k\sin\varphi &= \int_0^{\varphi}(\Delta\varphi+k\cos\varphi)d\varphi = \\
&= 2\int_0^{w}\frac{1+k\cos 2w}{\sqrt{1+2k\cos 2w+k^2}}dw = \\
&= \frac{2}{1+k}\int_0^{w}\frac{1+k(1-2\sin^2 w)}{\sqrt{1-\frac{4k}{1+k}\sin^2 w}}\,dw.
\end{aligned}
$$

Sendo $k'=\frac{2\sqrt{k}}{1+k}$, passamos a ter

$E(k,\varphi)+k\sin\varphi=(1+k)E(k',w)+(1-k)F(k',w)$, o que mostra que um Integral Elíptico de 2ª espécie pode ser expresso num de primeira e num de segunda de módulo maior e amplitude menor.

Por outro lado, sabendo que $F(k',w)=\dfrac{1+k}{2}F(k,\varphi)$, obtém-se $\dfrac{1}{2}(1-k^2)F(k,\varphi)=E(k,\varphi)-(1+k)E(k',w)+k\sin\varphi$, o que mostra que qualquer Integral Elíptico de 1ª espécie se pode reduzir a dois de 2ª espécie.

Ainda no decorrer deste capítulo, o autor faz referência aos integrais de terceira espécie recordando, mais uma vez, que estes não se podem reduzir a tábuas e que, embora fosse possível encontrar uma fórmula para o seu cálculo, por um caminho análogo ao seguido para os integrais de primeira e segunda espécie, esta seria bastante complexa[37].

No que se refere aos integrais de primeira e segunda espécie, Zeferino dá uma ideia de como são formadas as tábuas de Legendre.

> "Calculados os integraes para uma serie de arcos comprehendidos entre 0º e 90º, determinar-se-hão os dos arcos intermedios por meio da interpolação, e os dos arcos superiores pela periodicidade.
>
> Legendre apresenta primeiro uma taboa contendo os valores d'estes integraes completos de primeira e segunda especie, de decima de gráu, ou de 6' em 6' e achando os seus logarithmos com 14 decimaes. A segunda taboa contém os valores dos integraes de primeira e de segunda especie de 30' em 30', para o modulo cujo angulo é 45º, e com 12 decimaes. (…)" (**[A46]**, p.44)

O autor dá igualmente a conhecer algumas propriedades[38] apresentadas por Legendre:

> "(…) sendo os seus parâmetros imaginarios, aquelles integraes se reduzem a outros que os tem reaes; que os integraes completos d´esta especie, ou cuja amplitude é de 90º se exprimem sempre nos das duas primeiras especies; que essa mesma reducção é possivel n´uma immensidade de casos; enfim, que sempre o valor d´estes integraes póde ser determinado por series muito convergentes, e bem adequadas ao seu calculo." (**[A46]**, pp.43,44)

Passemos à comparação com a obra, *"Théorie des Intégrales et des Fonctions Elliptiques"*, de Scloemilch. António Zeferino não explica, também, para além do que já foi citado antes, os métodos de cálculo no caso dos Integrais Elípticos de 2ª espécie bem como os respectivos exemplos, conteúdos que poderão ser encontrados na obra de Schloemilch.

No terceiro capítulo propõe-se tratar os seguintes conteúdos: "Desenvolvimentos em series dos integraes ellipticos das duas primeiras espécies. -Integraes completos.- Redução a estes. - Valores das series obtidas. - Transformações que augmentam a convergência." (**[A46]**, p.47).

Vejamos como aborda o assunto «Desenvolvimento em séries dos Integrais Elípticos».

Começa por considerar Integrais Elípticos completos de primeira espécie, $K = E\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$, uma vez que estes são os elementos mais simples para a formação das séries dos integrais com quaisquer amplitudes. De seguida, faz o desenvolvimento da potência do binómio que se encontra no denominador, obtendo:

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi+\frac{1}{2}\frac{3}{4}k^4\sin^4\varphi+\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}k^6\sin^6\varphi+\ldots\right)d\varphi$$

Considerando ainda a fórmula[39]:

$$\int \sin^m x dx = -\frac{\cos x \sin^{m-1} x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x dx\,,$$

fazendo $m = 2n$ e tomando o integral entre os limites 0 e $\frac{1}{2}\pi$, obtém depois de vários cálculos:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n} x dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{\pi}{2}\,.$$

Por outro lado, fazendo sucessivamente $n = 0,1,2,\ldots$, multiplicando os resultados por 1, $\frac{1}{2}k^2, \frac{1}{2}\frac{3}{4}k^4, \ldots$ e adicionando, vem:

$$K = \frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \ldots + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\right)^2 k^{2n}\right\}, \quad \mathbf{(5)}$$

atendendo a que para $n = 0$, se tem $\frac{\pi}{2}$.

Como podemos ver esta série converge muito rapidamente, para k muito pequeno: "Esta série é muito convergente para valores muito pequenos de k" (**[A46]**, p.50).

Colocando ainda a hipótese de k não ser muito pequeno, a fórmula anterior poderá substituir-se por outra. Para o efeito, deverá proceder-se à seguinte transformação: $F(k',w)=\frac{1+k}{2}F(k,\varphi)$. Assim, efectuando essa transformação teríamos:

$$K=F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1+k_1}{2}F\left(k_1,\pi\right)=\left(1+k_1\right)F\left(k_1,\frac{\pi}{2}\right)$$ [40],

que associada à relação **(5)** dá:

$$K=\frac{\pi}{2}\left(1+k_1\right)\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^{\,2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k_1^{\,4}+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k_1^{\,6}+\ldots+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\right)^2 k_1^{\,2n}\right\},$$

onde $k_1=\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}$.

Antes de generalizar, Zeferino analisa o que se passa no caso dos integrais completos de segunda espécie:

$$E=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\Delta\varphi d\varphi=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(1-k^2\sin^2\varphi\right)^{1/2}d\varphi .$$

Fazendo um raciocínio análogo ao que fez com os integrais de primeira espécie, obtém:

$$E=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\left(1-\frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi-\frac{1}{2\cdot 4}k^4\sin^4\varphi-\frac{3}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6\varphi+\ldots\right)d\varphi$$

que, integrando, dá

$$E=\frac{\pi}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2-\frac{1.3}{(2.4)^2}k^4-\frac{1.3^2.5}{(2.4.6)^2}k^6-\ldots\right\}$$

ou, como facilmente se verifica:

$$E=\frac{\pi}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{k^2}{1}-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{k^4}{3}-\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\frac{k^6}{5}-\ldots-\left(\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6...2n}\right)^2\frac{k^{2n}}{2n-1}\right\}.$$

Tal como nos é possível observar, a série não é rapidamente convergente. Mas, quanto a este facto, Zeferino refere apenas que, tal como nos integrais de 1ª espécie esta é fácil de obter, limitando-se a apresentar a fórmula análoga:

$$E=\frac{\pi}{2}(1-k_1)\left\{1+5\left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2+2\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k_1^4+\ldots+(4n+1)\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\right)^2 k_1^{2n}\right\}.$$

Mas vejamos como obter esta fórmula, seguindo o raciocínio de Schloemilch: Consideremos

$$K=\frac{\pi}{2}\ 1+k_1\ \left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k_1^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k_1^6+\ldots+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\right)^2 k_1^{2n}\right\}$$

e

$$E=(1-k^2)\left(K+k\frac{dK}{dk}\right)\Leftrightarrow E=(1-k^2)\left(K+k\frac{dK}{dk_1}:\frac{dk_1}{dk}\right).$$

Substituindo o k por $\frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}$, vem $E=\frac{(1-k_1)}{1+k_1}\left(\frac{1-k_1}{1+k_1}K+2k_1\frac{dK}{dk_1}\right)$, o que nos permite obter:

$$E=\frac{\pi}{2}(1-k_1)\left\{1+5\left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2+2\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k_1^4+\ldots+(4n+1)\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\right)^2 k_1^{2n}\right\}.$$

Analisados os integrais completos de primeira e de segunda espécie, analisam-se agora os integrais de qualquer amplitude. A. Zeferino vai concluir que as séries encontradas não são rapidamente convergentes não tendo, por isso, grande utilidade prática.

Propõe então que, em $F(k,\varphi)$, se faça $k=\frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1}$, obtendo desta forma

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{1+k_1}{\sqrt{1+2k_1\cos 2\varphi+k_1^2}}=(1+k_1)\ 1+k_1e^{2\varphi i}\ ^{-1/2}\ 1+k_1e^{-2\varphi i}\ ^{-1/2},$$

ou equivalentemente

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=A_0-A_2\cos 2\varphi+A_4\cos 4\varphi-A_6\cos 6\varphi+\ldots,$$

sendo

$$A_0=(1+k_1)\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k_1^4+\ldots\right\}$$

$$A_2=2(1+k_1)\left\{\frac{1}{2}k_1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{3}{4}k_1^3+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{5}{6}k_1^5+\ldots\right\}$$

$$\ldots$$

Com base no desenvolvimento obtido para o integral completo de primeira espécie[41], conclui que $A_0 = \frac{2}{\pi}K$ e $A_2 = \frac{4}{\pi}\left\{2\frac{K-E}{k^2} - K\right\}$, fazendo notar, desta forma, que todos os coeficientes se podem exprimir através de integrais completos do mesmo módulo de primeira e segunda espécie. Também a fórmula $(n-1)A_n = 2(n-2)\frac{2-k^2}{k^2}A_{n-2} - (n-3)A_{n-4}$, mostra como todos os coeficientes se exprimem nos dois primeiros que, como já vimos, se escrevem em função de *E* e *K*.

Zeferino sugere ainda, que no integral $F(k,\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$ se substitua $\frac{1}{\Delta\varphi}$ por:

$$A_0 - A_2\cos 2\varphi + A_4\cos 4\varphi - \ldots\ldots$$

Após substituição e integração, obtém-se:

$$F(k,\varphi) = A_0\varphi - \frac{1}{2}A_2\sin 2\varphi + \frac{1}{4}A_4\sin 4\varphi - \ldots \pm \frac{1}{2^n}A_{2n}\sin 2n\varphi.$$

Quanto aos integrais de segunda espécie, o autor limita-se a escrever

$$E(k,\varphi) = B_0\varphi + \frac{1}{2}B_2\sin 2\varphi - \frac{1}{4}B_4\sin 4\varphi + \ldots \pm \frac{1}{2n}B_{2n}\sin 2n\varphi,$$

onde $(2n+1)B_{2n} = \frac{2}{k^2}(2-k^2)(2n-2)B_{2n-2} - (2n-5)B_{2n-4}$; $B_0 = \frac{2}{\pi}E$ e $B_2 = \frac{1}{\pi}\frac{(2-k^2)E - 2(1-k^2)k}{3k^2}$.

Mais uma vez, Zeferino limitou-se a copiar as conclusões obtidas por Schloemilch, omitindo todos os cálculos intermédios.

No trabalho do analista alemão ainda podemos encontrar a explicação de como proceder no caso de se querer calcular, ao mesmo tempo, $F(k,\varphi)$ e $E(k,\varphi)$ para o mesmo módulo, dando-se ainda como complemento um exemplo. Schloemilch ainda se preocupou em mostrar a utilidade prática das séries. Assim, explicou que, se substituirmos $1-k_1$ por $\frac{1-k_1^2}{1+k_1}$ em

$$E = \frac{\pi}{2}(1-k_1)\left\{1 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2 + 2\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k_1^4 + \ldots + (4n+1)\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}\right)^2 k_1^{2n}\right\}$$

e se multiplicarmos a série por $1-k_1^2$, obteremos:

$E = \frac{\pi}{2(1+k_1)}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k_1^2+\left(\frac{1}{2\cdot 4}\right)^2 k_1^4+...\right\}$, fórmula que nos dá o comprimento do arco de um quarto da elipse, onde os semi-eixos são *a* e *b*, para $k=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ e $k_1=\frac{a-b}{a+b}$.

Outro assunto importante, estudado por Schloemilch, são os desenvolvimentos em séries que permitem calcular facilmente *K* e *E* para valores muito grandes de *k*, isto é, para valores que se aproximem da unidade, finalizando com um exemplo ([**A31**]).

No quarto capítulo, Zeferino trata das operações com os Integrais Elípticos de todas as espécies bem como de fórmulas e reduções.

O autor refere que:

> “ (…) dadas duas funcções homogeneas mas de diversos argumentos, determinar uma funcção da mesma especie, que seja a sua somma, a sua differença, etc., e tal que o seu argumento se exprima por uma relação determinada entre os argumentos das funções dadas.” (**[A46]**, p.57).

Vai então mostrar, neste capítulo, que nos Integrais Elípticos de todas as espécies se verificam iguais propriedades. Começa por provar que: “dois integraes ellipticos de primeira especie, do mesmo modulo e de amplitudes diversas, podem sempre reduzir-se pela sua somma a um integral da mesma especie, do mesmo modulo e com amplitude determinada.” (**[A46]**, p.62).

Para o efeito, considera a soma de dois integrais de primeira espécie e vai provar que esta ainda é um integral de primeira espécie, isto é:

$$f(x)+f(y)=f(z),$$

onde, $f(x)=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, $f(y)=\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}$ e $f(z)=\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$.

Assim, considerando $f(x)+f(y)=C$, depois de derivarmos e dividirmos, o resultado obtido, por $1-k^2x^2y^2$, vem:

$$\frac{\sqrt{1-y^2 \quad 1-k^2y^2}}{1-k^2x^2y^2}dx+\frac{\sqrt{1-x^2 \quad 1-k^2x^2}}{1-k^2x^2y^2}dy=0\,.$$

Para continuar a prova, de que $f(x)+f(y)=f(z)$, vai proceder-se a uma integração por partes, considerando M e N o primeiro e segundo integral, respectivamente. Assim, obtém-se:

$$M=\frac{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}{1-k^2x^2y^2}x-\int\frac{Ady}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}-\int B\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}dx$$ [42],

e de modo análogo, conclui-se que:

$$N=\frac{\sqrt{1-x^2 \quad 1-k^2x^2}}{1-k^2x^2y^2}y-\int\frac{Adx}{\sqrt{1-x^2 \quad 1-k^2x^2}}-\int B\sqrt{1-x^2 \quad 1-k^2x^2}\,dy$$ [43], onde

$$A=\frac{xy \;\; 2k^2(x^2+y^2)-(1+k^2)(1+k^2x^2y^2)}{(1-k^2x^2y^2)} \text{ e } B=\frac{2k^2x^2y^2}{1-k^2x^2y^2 \;\; ^2}\,.$$

Como $M+N=C_1$ e $\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}=0$,

ou equivalentemente $\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}dx+\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}dy=0$,

teremos: $\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}=C_1$, o que nos leva a concluir que $C_1=z$. De facto, se substituirmos $x=0$ na expressão precedente, vem $y=C_1$. Por outro lado, como $f(x)=0$, tem-se que $C=f(C_1)$. Mas, porque $C=f(z)$ chega-se à conclusão procurada: $z=\frac{x\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}+y\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}{1-k^2x^2y^2}$, isto é, obter z em função de x e y.

Considerando $x=\sin\varphi$; $y=\sin\psi$ e $z=\sin\sigma$, por hipótese, obter-se-á:

$$F(k,\varphi)+F(k,\psi)=F(k,\sigma)\,, \qquad \textbf{(6)}$$

sendo $\sin\sigma=\frac{\sin\varphi\cos\psi\Delta\psi+\sin\psi\cos\varphi\Delta\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$. **(7)**

Antes de prosseguir com as restantes propriedades, A. Zeferino chama a atenção para o facto de a fórmula **(7)** nos permitir calcular a amplitude σ e, mais ainda, que a partir da mesma poderemos encontrar $\operatorname{tg}\sigma = \dfrac{\operatorname{tg}\varphi\Delta\psi + \operatorname{tg}\psi\Delta\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi\Delta\varphi\Delta\psi}$.

No que se refere ao teorema da subtracção, como é óbvio, remete para o teorema da adição substituindo em **(6)** e **(7)** ψ por $-\psi$, obtém-se:

$$F(k,\varphi) - F(k,\psi) = F(k,\sigma),$$

e consequentemente $\sin\sigma = \dfrac{\sin\varphi\cos\psi\Delta\psi - \sin\psi\cos\varphi\Delta\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$, o que se verifica facilmente, tendo em atenção que a função seno é uma função ímpar e a função co-seno é uma função par.

Para a multiplicação Zeferino vai mostrar que: a multiplicação de um Integral Elíptico de primeira espécie por um número qualquer, ainda é um Integral Elíptico de primeira espécie. Sendo assim, considera a seguinte igualdade:

$$F(k,\varphi) + F(k,\psi) = F(k,\sigma).$$

Substituindo $\varphi = \psi$ e $\sigma = \varphi_2$, obtém $2F(k,\varphi) = F(k,\varphi_2)$, sendo $\sin\varphi_2 = \dfrac{2\sin\varphi\cos\varphi\Delta\varphi}{1-k^2\sin^4\varphi}$.

De modo análogo, se tem:

$F(k,\varphi_2) + F(k,\varphi) = F(k,\varphi_3)$ e consequentemente $3F(k,\varphi) = F(k,\varphi_3)$, onde $\sin\varphi_3 = \dfrac{\sin\varphi_2\cos\varphi\Delta\varphi + \sin\varphi\cos\varphi_2\Delta\varphi_2}{1-k^2\sin^2\varphi\sin^2\varphi_2}$.

A. Zeferino não aprofunda o estudo da divisão, aludindo a esta como algo que é conseguido facilmente: "Egualmente se vê com clareza como é possivel a divisão de um integral d´esta especie por qualquer numero (…)"(**[A46]**, p.64).

De facto, como o autor refere, o processo é fácil, uma vez que se considerarmos $F(k,\varphi_m) = mF(k,\varphi)$ teremos $F(k,\varphi) = \dfrac{1}{m}F(k,\varphi_m)$. Se ainda admitirmos φ_m como conhecido e desconhecido, tomando $\varphi_m = \psi$ obtemos $F(k,\varphi) = \dfrac{1}{m}F(k,\psi)$, o que prova que a divisão de um Integral Elíptico de primeira espécie por um número qualquer ainda é um Integral Elíptico de Primeira Espécie.

Quanto aos Integrais de segunda espécie, somente a adição é estudada em pormenor. Considerando $E(k,\varphi)+E(k,\psi)=x$ e derivando, obtém-se $dx=\Delta\varphi d\varphi+\Delta\psi d\psi$. **(8)**

Atendendo à soma dos integrais de primeira espécie, tem-se

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}+\frac{d\psi}{\Delta\psi}=0 \qquad \mathbf{(9)}$$

ou equivalentemente

$$\Delta\psi d\varphi+\Delta\varphi d\psi=0\,, \qquad \mathbf{(10)}$$

que adicionada a **(8)** dará $dx=\ \Delta\varphi+\Delta\psi\ \ \ d\varphi+d\psi$.

Sabendo que a equação **(9)** conduz à relação $\cos\sigma=\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\Delta\sigma$. Tem-se, também:

$$\begin{matrix}\cos\varphi=\cos\sigma\cos\psi+\sin\sigma\sin\psi\Delta\varphi \\ \cos\psi=\cos\sigma\cos\varphi+\sin\sigma\sin\varphi\Delta\psi\end{matrix}$$

, de onde, tirando os valores de $\Delta\varphi$ e $\Delta\psi$ e substituindo em **(9)**, se obtém:

$$dx=\left(\frac{\cos\varphi-\cos\psi\cos\sigma}{\sin\psi\sin\sigma}\right)d\varphi+\left(\frac{\cos\psi-\cos\varphi\cos\sigma}{\sin\varphi\sin\sigma}\right)d\psi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow dx=\frac{d\ \ \sin^2\varphi+\sin^2\psi+2\cos\sigma\cos\varphi\cos\psi}{\sin\psi\sin\varphi\sin\sigma}\,,$$

ou ainda: $dx=k^2d(\sin\sigma\sin\varphi\sin\psi)$, originando $x=k^2\sin\sigma\sin\varphi\sin\psi+E(k,\sigma)$. Finalmente, da relação anterior, deduz-se:

$$E(k,\varphi)+E(k,\psi)=E(k,\sigma)+k^2\sin\varphi\sin\psi\sin\sigma\ . \qquad \mathbf{(11)}$$

Esta relação estabelece o teorema da adição dos Integrais Elípticos de segunda espécie.

O autor faz ainda referência aos integrais de terceira espécie, limitando-se apenas a apresentar a fórmula relativa ao teorema da adição, que é deduzida por Schloemilch:

$$\Pi_0(h,k,\varphi)+\Pi_0(h,k,\psi)= \qquad \mathbf{(12)}$$

$$\Pi_0(h,k,\sigma)+\int_0^{\sin\varphi\sin\psi}\frac{h\sin\sigma d(\sin\varphi\sin\psi)}{1+h\sin^2\sigma-2h\Delta\sigma\cos\sigma\sin\varphi\sin\psi+h(h+k^2\sin^2\sigma)\sin^2\varphi\sin^2\psi}$$

No que diz respeito às restantes operações, o autor limita-se a escrever que estas são de fácil dedução: " Os theoremas respectivos para as outras operações sobre os integrais de segunda e terceira especie, seriam evidentemente deduzidos das formulas (41) e (42) como para os de primeira especie o foram de (33)."[44] (**[A46]**, p.66).

Passemos de seguida à comparação com *"Théorie des Intégrales et des Fonctions Elliptiques"*. Um dos aspectos importantes a referir é como Schloemilch inicia o estudo da adição dos Integrais Elípticos, uma vez que começa com dois exemplos: um usando os logaritmos e o outro usando as funções ciclométricas. Outro aspecto, a salientar, é o aparecimento de mais duas demonstrações para a soma de Integrais Elípticos de primeira espécie. Uma primeira dada por Schloemilch e uma segunda demonstração[45] dada por Graindorge, que segundo este foi apresentada por Walton numa nota publicada em 1870 (*The quarterly journal of puré and appied mathematics, vol. XI*).

Para além do que já foi referido, Schloemilch enuncia ainda, o seguinte teorema: «Se *r, s, t*, etc…, são números quaisquer, positivos ou negativos, e , , , etc…, as amplitudes dadas, a soma de um número finito de termos $rF(k,\varphi)+sF(k,\psi)+tF(k,\chi)+...$ pode ser reduzido a um só integral elíptico, onde o módulo é também *k* e a amplitude pode ser deduzida de , , , etc…, através das operações algébricas».

Para terminar, a primeira parte do seu trabalho, Zeferino considera um capítulo onde se propõe apresentar algumas aplicações dos Integrais Elípticos. O autor refere, mais uma vez, que o trabalho que faz neste campo é abordado muito superficialmente, uma vez que não se justificava uma abordagem detalhada numa obra como a do carácter da sua dissertação.

Como exemplos de aplicação dos Integrais Elípticos, Zeferino debruça-se sobre o estudo da rectificação da elipse e da hipérbole. Mostra que, a rectificação da elipse depende de um integral de 2ª espécie e a da hipérbole dos integrais elípticos de 1ª e 2ª espécie.

Com base na representação gráfica da Figura 3.2.2.

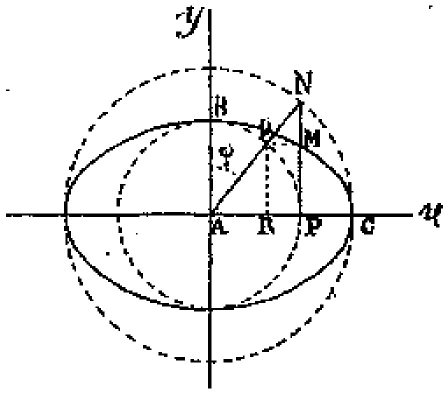


Figura 3.2.2: Rectificação da Elipse (**[A46]**, p.109).

faz o estudo da rectificação da elipse. Para se referir à amplitude do arco, escreve $BM = s$ em vez de $BM = s$; escreve ainda segmento de recta AN, em vez de AN, amplitude do ângulo BAN em vez de $B\hat{A}N$ e medida de comprimento do segmento de recta AN, quando deveria escrever $\overline{AN}$. Mas, se existem algumas lacunas (características do século XIX), ao nível de notação, o mesmo não se verifica ao nível da sua explicação, que se apresenta bastante minuciosa. Assim, chega à conclusão que para a equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, com $a > b$[46], e tomando $x = a\sin\varphi$ e $y = b\cos\varphi$, se obtém:

$$\begin{aligned} ds^2 = dx^2 + dy^2 &= (a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)d\varphi^2 = \\ &= \left[a^2-(a^2-b^2)\sin^2\varphi\right]d\varphi^2 = \\ &= a^2\left\{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\sin^2\varphi\right\}d\varphi^2. \end{aligned}$$

Sendo $k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, a excentricidade, conclui que:

$$s = a\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = aE(k,\varphi).$$

Se $\varphi = \frac{\pi}{2}$, obter-se-ia um quarto da elipse, e portanto teriamos $s = aE\left(k,\frac{1}{2}\pi\right)$. Refere, sem explicar, que através da teoria da adição dos integrais de segunda espécie outros problemas se resolveriam no que diz respeito a esta secção cónica.

Para a hipérbole utiliza um processo análogo, baseando-se na representação geométrica da Figura 3.2.3.

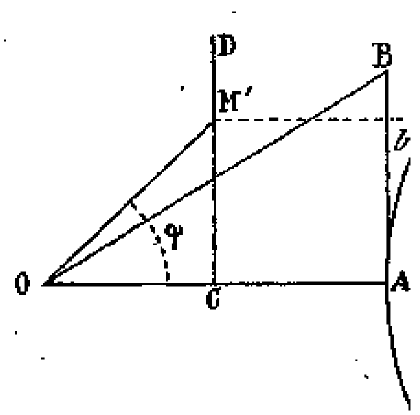


Figura 3.2.3: Rectificação da Hipérbole (**[A46]**, p.109).

Vejamos como Zeferino mostra que, o arco da hipérbole pode ser rectificado fazendo uso dos Integrais Elípticos de primeira e segunda espécie, isto é:

$$s = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} F(k,\varphi) - \sqrt{a^2+b^2}\,E(k,\varphi) + \sqrt{a^2+b^2}\,\Delta\varphi \operatorname{tg}\varphi .$$

Para chegar até esta fórmula, o autor considera OA como semi-eixo maior, sendo AB o semi-eixo menor e $\overline{OB} = \sqrt{a^2+b^2}$ a excentricidade. De seguida considerando uma terceira proporcional a OB e AB, obtém-se $\overline{OC} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{OB}} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Finalmente, tirando por C a paralela ao segundo eixo, obtém para um ponto qualquer M:

$$\overline{M'C} = y = \overline{OC} \cdot tgM'\hat{O}C = \frac{b^2 \operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{a^2+b^2}}, \text{ sendo } \varphi = M'\hat{O}C .$$

Da equação $x = \frac{a}{b}\sqrt{y^2+b^2}$ tira o valor da abcissa, $x = \frac{a}{\cos\varphi}\sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2+b^2}\sin^2\varphi}$, donde para $k = \frac{a}{\cos\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$ vem $ds = \frac{b^2 d\varphi}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\cos^2\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$, o que conduz a:

$$s = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} F(k,\varphi) - \sqrt{a^2+b^2}\,E(k,\varphi) + \sqrt{a^2+b^2}\,\Delta\varphi \operatorname{tg}\varphi .$$

Como se pode verificar A. Zeferino teve a preocupação de apresentar, de uma forma elaborada, exemplos de aplicação dos Integrais Elípticos. Saliente-se que na grande obra de Briot e Bouquet tal não é feito. No entanto, Hancock em *"Elliptic Integrals"* ([**A34**], pp. 88-91), tal como Zeferino, apresenta de um modo muito semelhante, um capítulo com exemplos. Embora não se debruce sobre a rectificação da hipérbole, neste trabalho poderão ser encontrados outros exemplos como, a rectificação da Lemniscata e o movimento do pêndulo simples.

António Zeferino, como vem sendo referido durante este terceiro capítulo, segue a obra de Schloemilch. No entanto, mais uma vez, a obra deste último é mais completa. Para além da rectificação da elipse e da hipérbole, Schloemilch, explica a rectificação da Lemniscata bem como a relação entre o arco de hipérbole e dois arcos da elipse.

Ainda comparando com *"Théorie des Intégrales et des Fonctions Elliptiques"*, tradução da obra de Schloemilch, e no que diz respeito, ao capítulo Integrais Elípticos, para além dos assuntos referidos por Zeferino, podemos encontrar uma secção intitulada: "Área de Superfícies com centro do 2º grau", com a demonstração do seguinte teorema:

"Sobre qualquer superfície com centro do 2º grau, podemos construir uma infinidade de zonas onde a área se exprime por meio de integrais elípticos de 1ª e 2ª espécie.". Apresentando o autor, de seguida, a explicação das consequências deste.

Estuda também a área de certas superfícies polares. No que se refere a este último tópico, podemos encontrar a demonstração de dois teoremas:

"A intersecção da superfície polar

$$\left(\xi^2+\eta^2+\zeta^2\right)^2 = a\xi^2+b^2\eta^2+c^2\zeta^2,$$

com dois cones elípticos

$$a^4\xi^2+b^4\eta^2 = c^4\zeta^2 \cot g^2 w_1,$$

$$a^4\xi^2+b^4\eta^2 = c^4\zeta^2 \cot g^2 w_0,$$

dá uma zona que tem a mesma área que a zona de um elipsóide construído sobre o semi-eixos a', b', c', e onde as linhas limites são as curvas, das normais iguais, correspondentes às inclinações w_1 e w_0.";

" A semi-superfície polar é decomposta pelo cone

$$a^4\xi^2+b^4\eta^2 = \left(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2\right)\zeta^2,$$

numa zona e uma calota, onde a diferença das áreas é:

$$\pi\left\{c^2-\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}\right\}".$$

Na segunda parte deste capítulo passaremos a analisar de que forma A. Zeferino tratou as Funções Elípticas.

3.2.3 Segunda Parte/Funções Elípticas

Tivemos oportunidade de verificar, no capítulo anterior, como Zeferino abordou os Integrais Elípticos na sua obra *"Integraes e Funcções Ellipticas"*. Vimos como o autor chegou aos integrais das três espécies, transformou Integrais Elípticos de primeira e segunda espécie através dos módulos e das amplitudes, desenvolveu em séries os Integrais Elípticos das duas primeiras espécies, completos e de qualquer amplitude, e como procedeu com as operações básicas[47] entre Integrais Elípticos, entre outros assuntos. Durante a primeira parte do Capítulo 3, do presente trabalho, ficou a ideia de que o autor não aprofundou algumas questões pertinentes e que não forneceu determinadas informações ao leitor aludindo, muitas vezes, ao facto de que estas saíam do contexto do seu trabalho.

A segunda parte da sua obra, é dedicada ao estudo das Funções Elípticas. No capítulo VI propõe-se dar a definição de Função Elíptica bem como as respectivas propriedades. Zeferino começa por fazer uma breve introdução, na qual valoriza o campo da análise, referindo-se desse modo às funções goniométricas e ciclométricas, arcos e linhas trigonométricas, que foram estudadas geometricamente, antes de o serem analiticamente. Refere ser possível, no entanto, chegar às mesmas conclusões, caso tivesse optado, inicialmente, por uma abordagem analítica. É então que Zeferino faz uma analogia entre aquelas funções, que surgem da inversão de certos integrais[48], e as Funções Elípticas, que podem ser consideradas as funções inversas dos Integrais Elípticos.

Inicia assim o seu estudo analisando o que se passa com os integrais de primeira espécie: $F(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$, onde $\Delta\varphi=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$. Fazendo $F(k,\varphi)=u$, obtém como notação inversa $\varphi=am(u),\operatorname{mod}k$, ou mais simplesmente $\varphi=am(u,k)$[49].

Considerando $k = 0$, tem-se $u = F(0,\varphi) = \varphi$ e $\varphi = am(u,0)$. Por outro lado se $k = 1$, $u = F(1,\varphi) = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\varphi\right)$[50], donde $\varphi = 2\operatorname{arctg} e^u - \frac{1}{2}\pi$, e portanto

$$u = am(u,0) \text{ e } \varphi = am(u,1) = 2\operatorname{arctg} e^u - \frac{1}{2}\pi .$$

Mas, como se pode observar, António Zeferino apresenta apenas o caso em que u varia de 0 a e está compreendido entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, não referindo o caso em que e u crescem ao mesmo tempo e varia entre 0 e $\frac{\pi}{2}$. Neste último caso, ter-se-ia: $\varphi = am(u,1) = 2\operatorname{arctg} e^u + m\pi - \frac{1}{2}\pi$, em que m é um número par.

Demonstra, embora de uma forma um pouco superficial, duas propriedades das Funções Elípticas, as quais passamos a enunciar.

1ª Propriedade: $am(2mK \pm u) = m\pi \pm am(u)$

Com base numa propriedade dos Integrais Elípticos[51], analisada na primeira parte do Capítulo 3 deste trabalho, tem-se: $\int_0^{m\pi \pm \omega} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 2mK \pm \int_0^{\omega} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$. Considerando $\int_0^{\omega} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = u$ e $\int_0^{m\pi \pm \omega} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = v$, onde $\omega = am(u)$ e $m\pi \pm \omega = am(v)$, obtém-se $v = 2mK \pm u$ e consequentemente $am(2mK \pm u) = m\pi \pm am(u)$.

2ª Propriedade: $am(-\varphi) = -am(\varphi)$

Esta propriedade é imediata, como o próprio Zeferino refere, uma vez que sendo $\int_0^{-\psi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = -\int_0^{\psi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$, imediatamente se deduz: $am(-\varphi) = -am(\varphi)$.

De seguida vamos ter oportunidade de verificar que, Zeferino teve a preocupação de dar uma interpretação geométrica da relação entre as amplitudes e os integrais. Para o efeito, considerou a curva das amplitudes, que tem por abcissas o valor do integral u e por ordenadas as respectivas amplitudes, ver Figura 3.2.4.

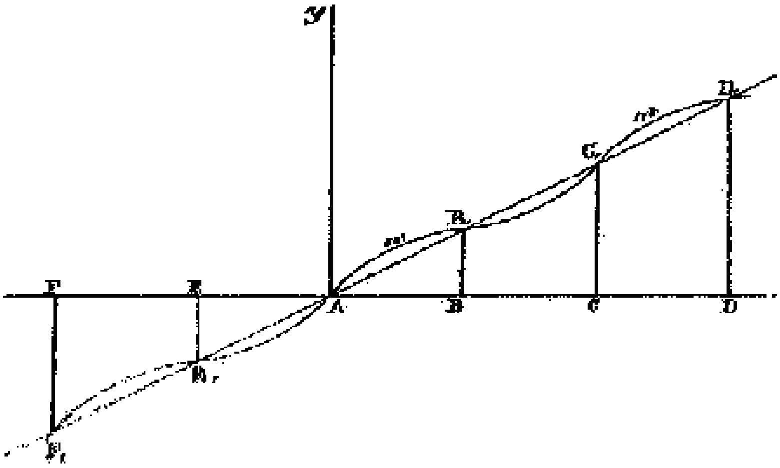


Figura 3.2.4: Curva das Amplitudes (**[A46]**, p.109)

Observando o gráfico, conclui-se que se $u = 0$ então $\varphi = 0$ e, que a inclinação da recta tangente à curva com o eixo das abcissas é dada por:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dam(u)}{du} = \frac{d\varphi}{\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}} = \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,.$$

Repare-se que se na condição anterior, fizermos:

$\varphi = 0$, vem $\operatorname{tg}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^{\circ}$;

$\varphi = \pi$, vem $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{1-k^2} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{1-k^2}$ [52] e

$\varphi = 2\pi$, vem $\operatorname{tg}\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 45^{\circ}$.

Concluímos, deste modo, que a tangente à curva das amplitudes, que divide ao meio o ângulo formado pelo eixo das abcissas e pelo eixo das ordenadas, se vai aproximando do eixo dos *xx* até um limite inferior crescendo, logo de seguida, adquirindo novamente uma inclinação de 45º.

O autor conclui que se $u = \pm K, \pm 2K, \pm 3K, \ldots, \pm mK$ vem $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}, \pm 2\frac{\pi}{2}, \pm 3\frac{\pi}{2}, \ldots, \pm m\frac{\pi}{2}$, o que nos permite observar, através da representação geométrica, que os pontos que estão sobre uma recta que passa pela origem[53] são os da curva das amplitudes que têm por abcissas múltiplos do integral completo.

Através da representação gráfica, explica como se podem deduzir as propriedades enunciadas atrás. Assim, se fizermos coincidir CD_1 com AB_1, a porção da curva C_1nD_1 coincidirá com AnB_1, e estaremos perante a primeira propriedade. Verificar-se-á a existência da segunda, notando que B_1C_1 é igual a AB_1, mas por ordem inversa.

Feita esta análise, verificámos que Zeferino se preocupou em demonstrar o que disse logo no início do seu capítulo, no que se refere à possibilidade do estudo de toda esta teoria a partir da geometria, fazendo-o de forma exaustiva, bem conseguida e completa.

Seguidamente o autor refere as três Funções Elípticas mais importantes, que servem de base a todas as outras.

> "Por entre essa infinidade de funcções, cuja existência se concebe, três têm sido consideradas como merecendo especial atenção, porque ellas constituem a base de todas as outras; têm um caracter especificado de maior simplicidade relativa, ou pelo menos podem ser consideradas como os termos de redução de todas as outras." (**[A46]**, p.79)

Considerando o Integral Elíptico de primeira espécie, $u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$, e $\varphi = am(u)$, conclui, finalmente, que $z = \sin am(u)$ [54] chamando-lhe Função Elíptica de primeira espécie.

Considera ainda mais duas funções, $z = \cos am(v)$ e $z = \Delta\, am(t)$, que são as funções inversas dos integrais $v = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k'^2 + k^2 z^2)}}$ e $t = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(z^2 - k'^2)}}$, respectivamente.

Na teoria das Funções Elípticas estas funções inversas ocupam a mesma categoria que o seno e o co-seno nas funções trigonométricas. Esta semelhança, é reconhecida, facilmente, por meio das formas diferenciais, que podemos deduzir da equação: $damu = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\,du = \Delta amu \cdot du$.

Com efeito, temos:

$$d \sin amu = \cos amu \Delta amu \cdot du\,,$$

$$d \cos amu = -\sin amu \Delta amu \cdot du\,,$$

$$d\Delta amu = -k^2 \sin amu \cos amu \cdot du\,.$$

Fazendo a comparação com as funções goniométricas Zeferino refere que, tal como estas, as três funções amplitude estão sujeitas à periodicidade. Contudo, não deixa de realçar que embora exista esta analogia, no que diz respeito à periodicidade, é esta mesma periodicidade que as torna distintas. Desta forma, atendendo a que: $am(4K \pm u) = 2\pi \pm am(u)$ e pela 2ª propriedade das Funções Elípticas, atrás citada[55], resulta:

$$\sin am(4K \pm u) = \sin am(u)\,,$$

$$\cos am(4K \pm u) = \cos am(u)\,,$$

$$\Delta\, am(4K \pm u) = \Delta\, am(u)\,,$$

o que significa que quando a variável aumenta $4K$ estas funções têm o mesmo valor, isto é, têm período $4K$. Ainda comparando com as funções trigonométricas, que têm como período um valor absoluto, o período nas Funções Elípticas não tem as mesmas características porque K depende do valor do módulo.

Embora Zeferino não o refira, se $k = 0$ então $K = \frac{1}{2}\pi$ e ter-se-á:

$$\sin amu = \sin u\,; \qquad \cos amu = \cos u \qquad \text{e} \qquad \Delta amu = 1\,.$$

Ficamos assim, reduzidos ao caso das funções trigonométricas, que têm como período o número real 2π.

Comparando com *"Théorie des Intégrales et des Fonctions Elliptiques"*, tradução da obra de Schloemilch, para além do que foi referido durante a exposição deste capítulo, ainda podemos encontrar a explicação para a periodicidade da função $\sin am(u,1)$. De facto, se $k = 1$, então $K = \infty$ e assim:

$$\sin am(u,1) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} = \frac{e^{2u} - 1}{e^{2u} + 1}\,.$$

Recordando que $e^{2(u \pm \pi i)} = e^{2u}$, esta função poderá ser considerada periódica de período πi, o que leva à conclusão de que $\sin am(u,1)$ é uma função periódica onde o índice é πi.

No capítulo seguinte, do seu trabalho, Zeferino vai estudar a propriedade das Funções Elípticas, por ele considerada a mais importante, que é a dupla periodicidade. O autor chega mesmo a referir: “ É realmente esta propriedade das funcções ellipticas, a mais importante e digna de ser convenientemente analysada” (**[A46]**, pp.81,82). Ainda a respeito desta propriedade Zeferino faz referência aos nomes de Jacobi, Liouville, Briot e Bouquet, uma vez que estes autores também se preocuparam com a dupla periodicidade.

António Zeferino dedica um capítulo inteiro, à dupla periodicidade das três Funções Elípticas de 1ª ordem: seno, co-seno e delta de amplitude.

> “É a dupla periodicidade das funcções ellipticas, ao mesmo tempo que o mais valioso título do seu valor, a mais conveniente prova da sua cathegoria superior. Cette propriété, importante, diz Hermite, manifeste d´une manière toute particulière la différence de nature des fonctions que la possèdent avec les fonctions algébriques rationnelles, et leur imprime leur caractère le plus apparent en quelque sorte de fonctions transcendantes. “(**[A46]**, p.92)

Note-se que o autor reforça o que já tinha dito, anteriormente, relativamente à dupla periodicidade das Funções Elípticas.

Como teremos oportunidade de verificar, pelo que é descrito a seguir, Zeferino fez uma análise detalhada para a função seno de amplitude, limitando-se a concluir que de modo análogo se obteriam conclusões para as funções co-seno e delta de amplitude: “ (…) pelo que respeita ás duas restantes funcções, apenas diremos que, por um caminho inteiramente análogo, se chegaria a analogas conclusões para ellas.” (**[A46]**, p.92)

Para o estudo da função seno, o autor sugere que se determine, entre os limites dados, o valor do integral correspondente:

$$U = \int_0^z f(z)dz \text{ , onde } f(z) = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} .$$

Começando por considerar os quatro pontos singulares[56]:

$$z = +1; \quad z = -1; \quad z = \frac{1}{k}; \quad z = -\frac{1}{k},$$

verifica que, em termos de representação gráfica, os dois primeiros encontram-se situados sobre o eixo das abcissas, enquanto que os dois últimos estão sobre este eixo na mesma posição relativa, ou fora deste. De seguida propõe que se analise o caso mais geral, tendo como apoio, a seguinte representação geométrica:

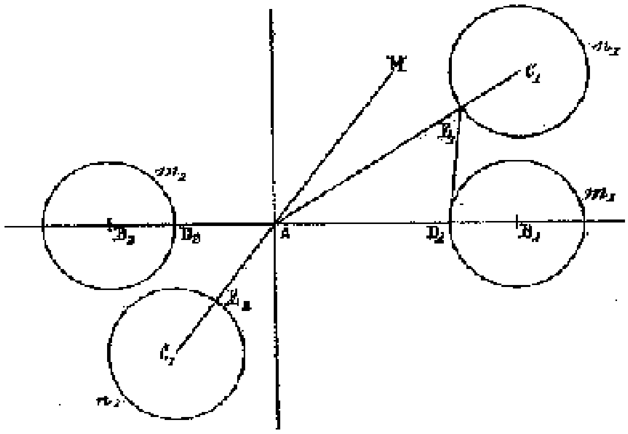


Figura 3.2.5: Representação dos pontos singulares (**[A46]**, p.111)

Seguidamente, vamos passar a descrever o raciocínio de Zeferino.

Considerando que, B_1, B_2, C_1 e C_2 são os pontos singulares e A e M os limites do integral, muitos são os caminhos que se podem seguir de A até M. Sendo que o mais geral é aquele que partindo de A, cerca muitas vezes cada um dos pontos, voltando a A, para depois seguir um caminho rectilíneo até M. Para chegar ao integral geral Zeferino vai estudar o integral relativo a cada caso: um que parte de A e envolve B_1 ou B_2 e o outro que parte de A e envolve C_1 ou C_2.

Assim, se partindo de A se envolver B_1 por um círculo de raio *r*, tem-se:

$$\int AD_1m_1D_1A = \int AD_1 + \int D_1m_1D_1 + \int AD_1 \text{ }^{57},$$

sabendo que, $\int D_1m_1D_1 = -ir\int_0^{2\pi} f(1-re^{i\theta})e^{i\theta}d\theta$, que é nulo quando $r=0$, que o integral linear é definido por $F = 2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$ e ainda que, a função parte de A com valor inicial +1, tomando no segundo trajecto, em todos os pontos, o mesmo valor, mas com sinal contrário, e que os limites são os mesmos mas desta vez com ordem inversa. Numa segunda revolução o valor do integral seria $-F$, numa terceira $+F$ e assim sucessivamente, concluindo que: "se o caminho da integração começando em A e terminando neste mesmo ponto, envolver n vezes o ponto singular B_1, o integral correspondente terá por valor zero, ou F, conforme n for um numero par ou impar." (**[A46]**, p.85**)**. Fazendo o mesmo para B_2, tendo apenas em consideração que os limites do integral são agora 0 e -1, conclui: "(…) –F ou zero, conforme o numero de revoluções for impar ou par." (**[A46]**, p.85)**.**

De modo análogo, ter-se-ia $2\int_0^{+1/k} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \pm G$, concluindo que: "se o caminho de integração, partindo de A, e terminando neste mesmo ponto, envolver muitas vezes, m por exemplo, os pontos C_1 ou C_2, o valor do integral será zero ou $\pm G$, conforme m for par ou impar, referindo-se o signal + ao movimento em volta de C_1 e o signal – ao que se supõe em volta de C_2" (**[A46]**, p.86).

Para o caso mais geral, Zeferino obtém:

$$\int_0^z f(z)dz = pF + qG + \int\Big|_0^z \pm f(z)\ dz$$

onde *p* e *q* são números inteiros pares ou ímpares e o sinal da função *f(z),* do integral linear, será o que esta tiver quando voltar a A, para seguir o caminho rectilíneo até M. Ainda no que diz respeito ao integral anterior, Zeferino refere que este poderá ser dividido em dois, consoante os valores pares ou ímpares de *p* e *q*, pelo que obtém: $\int_0^z f(z)dz = 2mF + n(F-G) + \int\Big|_0^z f(z)dz$ e $\int_0^z f(z)dz = (2m+1)F + nG - \int\Big|_0^z f(z)dz$, o que leva a concluir que, para conhecimento do integral geral, é suficiente determinar F e $(F-G)$, sendo $F = 2\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$ e $F-G = -2\int_1^{1/k} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$ [58].

Com base no que foi exposto anteriormente, o autor vai provar a existência de outro período para além de $4K$, que já foi referido durante este trabalho[59].

Deste modo, supõe que k é um número fraccionário, real e positivo, o que conduz a que $F-G$ seja imaginária, isto é: $F-G = -\frac{2}{i}\int_1^{1/k} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}$, onde ambos os binómios são positivos e o radical é um número real.

Pondo, $1-k^2 = k_1^2$ [60] e $z = \frac{1}{\sqrt{1-k_1^2x^2}}$ obtém:

$$F-G = 2i\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_1^2x^2)}} = 2iK_1 .$$

Como se pode observar, os integrais F e $F-G$ são Integrais Elípticos completos, embora de módulos diferentes. Como tal, A. Zeferino vai considerar $F = K$ e $F-G = K'$, cujos módulos são k e k', respectivamente, obtendo desta forma:

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = 4mK + i2nK_1 + \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$, no caso de m par

e

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = (4m+2)K + i2nK_1 - \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$, no caso de m ímpar.

Antes de prosseguir o autor, considerando U o integral geral e u o integral linear, escreve os integrais anteriores de forma mais simplificada:

$$U = 4mK + i2nK_1 + u \text{ e } U = (4m+2)K + i2nK_1 - u.$$

A partir de tudo isto, Zeferino atinge um dos seus objectivos: " (…) o seno da amplitude tem, alem do periodo real $4K_1$ já assignalado no capitulo precedente, um outro imaginario de índice $i \cdot 2K_1$." (**[A46]**, p.90).

De facto, tal como A. Zeferino conclui, ter-se-á:

$$\sin am(4mK + i2nK_1 + u) = \sin am(u);$$

$$\sin am \ \ (4m+2)K + i2nK_1 - u \ \ = \sin am(u).$$

Deduzida a dupla periodicidade, Zeferino preocupa-se em a demonstrar geometricamente. Para tal, considera a seguinte figura:

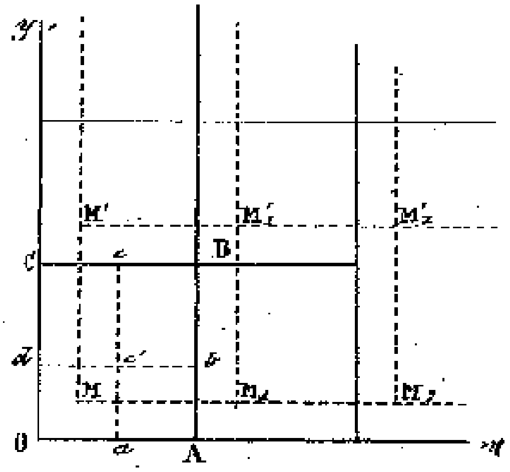


Figura 3.2.6: Representação da dupla periodicidade. Paralelogramo dos períodos. (**[A46]**, p.111)

Considerando, $\overline{OA} = 4K$ e $\overline{OC} = 2K_1$[61] sobre os eixos OX e OY, respectivamente, vai concluir que o valor que o seno da amplitude toma num ponto qualquer se repete em

M_1, M_2, etc. (como se pode observar na figura), o mesmo se verificando para outros pontos.

Ainda com base nesta representação geométrica, Zeferino vai mostrar que a função seno tem dois zeros e dois infinitos simples. Então, considerando o rectângulo $OABC$, conclui que a função tem o mesmo valor em quatro pontos que se encontram dentro deste, sendo dois positivos e dois negativos. Considerando as rectas[62] bd e ac, o rectângulo fica dividido em quatro partes, onde está cada um dos pontos referidos. Assim aproveita, mais uma vez, para fazer uma analogia com as funções trigonométricas, mais propriamente com a função seno[63].

O autor conclui que, embora a função seno da amplitude seja nula em seis pontos: $0, 2K, 4K, i2K_1, 2K+i2K_1, 4K+i2K_1$; e infinita em três: $iK_1, 2K+iK_1, 4K+iK_1$, estes resumem-se a dois zeros e dois infinitos simples, uma vez que considerando todos os rectângulos sucessivos estes vão ter dois lados em comum.

Saliente-se que o objectivo de Zeferino era provar que o seno da amplitude é uma função monodroma, ímpar, duplamente periódica, com dois zeros e dois infinitos simples. Resta-lhe assim mostrar que a função seno é uma função ímpar e monodroma. No entanto, tal como Schloemilch, não o vai fazer, remetendo antes para a obra de Briot e Bouquet, na qual se encontram estas demonstrações: "Completando as mais importantes propriedades d´esta funcção, facilmente se mostraria, como fazem Briot e Bouquet, que ella é impar e monodroma." (**[A46]**, p.91).

Passemos de seguida à comparação com *"Théorie des Intégrales et des Fonctions Elliptiques"*. Nesta obra temos a oportunidade de verificar que Schloemilch se debruçou sobre o estudo das três funções seno, co-seno e delta de amplitude, mas, como foi referido no parágrafo anterior, não provou que as funções eram monodromas. Contudo Graindorge, aquando da tradução, preocupou-se em fazê-lo ([**A31**]).

No capítulo VIII, penúltimo capítulo, Zeferino propõe-se focar os seguintes assuntos: «Operações dos argumentos das três Funções Elípticas de 1ª espécie; Fórmulas e deduções; Representação geométrica». Mas, tal como se vem verificando ao longo de toda a sua obra, faz uma abordagem muito superficial destes assuntos.

Começa por considerar a igualdade $f(x)+f(y)=f(z)$, designando $f(x)$, $f(y)$ e $f(z)$ por *a*, *b* e *c*, respectivamente.

Sendo:

$$x=\sin am(a),$$
$$y=\sin am(b),$$
$$z=\sin am(c)=\sin am(a+b),$$

conclui que:

$$\sin am(a+b)=\frac{\sin am(a)\cos am(b)\Delta am(b)+\sin am(b)\cos am(a)\Delta am(a)}{1-k^2\sin^2 am(a)\sin^2 am(b)}.$$

Fazendo uma analogia com as funções trigonométricas, deduz que: quando *k*=0, a fórmula anterior corresponde à do $\sin(a+b)$, em trigonometria. Embora Zeferino não o refira na sua dissertação, se $k=1$, obteríamos $snu=\tanh u$. Poder-se-á também observar que: quando *k*=0, as Funções Elípticas reduzem-se às funções circulares[64] e que, no caso de $k=1$, se reduzem às funções hiperbólicas[64].

De seguida, conclui que de modo análogo se tem:

$$\cos am(a+b)=\frac{\cos am(a)\cos am(b)-\sin am(a)\sin am(b)\Delta am(a)\Delta am(b)}{1-k^2\sin^2 am(a)\sin^2 am(b)}$$

e

$$\Delta am(a+b)=\frac{\Delta am(a)\Delta am(b)-k^2\sin am(a)\sin am(b)\cos am(a)\cos am(b)}{1-k^2\sin^2 am(a)\sin^2 am(b)}.$$

Fazendo, novamente, uma analogia com as funções trigonométricas, deduz mais algumas relações. Tomando $a=b$ em $sin\, am(a+b)$, $\cos am(a+b)$ e $\Delta am(a+b)$ obtém:

$$\sin am(2a)=\frac{2\sin am(a)\cos am(a)\Delta am(a)}{1-k^2\sin^4 am(a)},$$

$$\cos am(2a)=\frac{1-2\sin^2 am(a)+k^2\sin^4 am(a)}{1-k^2\sin^4 am(a)} \text{ e}$$

$$\Delta am(2a)=\frac{1-2k^2\sin^2 am(a)+k^2\sin^4 am(a)}{1-k^2\sin^4 am(a)} \text{., respectivamente.}$$

No que se refere à representação geométrica, apenas se limita a dizer que era fácil, não a fazendo: “Os theoremas da somma e multiplicação dos argumentos das funcções ellipticas de primeira especie podem ser representadas geometricamente por uma construcção simples e elegante que mostra como pelo conhecimento dos argumentos dados, se determina o argumento somma ou producto.” (**[A46]**, p.96).

A demonstração desta propriedade pode ser encontrada em *“Théorie des Intégrales et des Fonctions Elliptiques”*, tradução da obra de Schloemilch. Para além desta demonstração podemos ainda encontrar, entre outras, as seguintes fórmulas:

$$\sin am(iv) = i \operatorname{tg} am(v,k') \, ; \ \cos am(iv) = \frac{1}{\cos am(v,k')} \ \text{ e } \ \Delta am(iv) = \frac{\Delta am(v,k')}{\cos am(v,k')} .$$

Para terminar a sua dissertação, A. Zeferino propõe-se apresentar no último capítulo: “Desenvolvimento em série das funcções de primeira espécie. - Exposição de méthodos para esse fim. -Sua critica e confrontação.” (**[A46]**, p.97)

O autor refere que existem diversos métodos para fazer o desenvolvimento em série das funções de primeira espécie. “ Podemos, por exemplo, servir-nos da formula de MacLaurin[65], que se applica evidentemente ás funcções synecticas, embora de variável imaginária” (**[A46]**, p.97). Começa pela função seno de amplitude, que classifica como função analítica (função synéctica) para valores do módulo inferiores a K_1. Pela fórmula de MacLaurin (1698-1746) e atendendo a que a função seno é impar, considera:

$$\sin am(x) = \left(\frac{d\sin am(x)}{dx}\right)_0 \frac{x}{1} + \left(\frac{d^3\sin am(x)}{dx^3}\right)_0 \frac{x^3}{1.2.3} + \left(\frac{d^5\sin am(x)}{dx^5}\right)_0 \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \dots .$$

Sabendo que:

$$\frac{d\sin am(x)}{dx} = \cos am(x)\Delta am(x) \qquad , \qquad \frac{d\cos am(x)}{dx} = -\sin am(x)\Delta am(x) \qquad \text{e}$$

$\dfrac{d\Delta am(x)}{dx} = -k^2 \sin am(x)\cos am(x)$, obtém-se facilmente:

$$\frac{d^2\sin am(x)}{dx} = -(1+k^2)\sin am(x) + 2k^2 \sin^3 am(x)$$

$$\frac{d^3\sin am(x)}{dx} = \left[-(1+k^2) + 6k^2 \sin^2 am(x)\right]\cos am(x)\Delta am(x)$$

...

Calculando de seguida as respectivas derivadas para $x = 0$, ter-se-á:

$$\left[\frac{d\sin am(x)}{dx}\right]_0 = 1$$

$$\left[\frac{d^3\sin am(x)}{dx^3}\right]_0 = -(1+k^2)\text{, etc.}$$

Pode assim deduzir-se que:

$\sin am(x) = x - \frac{1+k^2}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{1+14k^2+k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}x^5 - .....$, para valores do módulo inferiores a K_1.

Em particular, para $k=0$ obter-se-á:

$\sin am(x) = x - \frac{1}{6}x^3...$, que é a fórmula do desenvolvimento em função do arco.

Embora não seja referido por Zeferino, se fizermos a substituição $k=1$ e $k_1 = \frac{1}{2}\pi$, encontra-se o desenvolvimento da função $\frac{e^{2w}-1}{e^{2w}+1}$.

Estudada a função seno, passa a debruçar-se sobre a função co-seno, que embora seja uma função analítica para valores inferiores a K_1 é, ao contrário da função seno, uma função par.

Assim, vem:

$$\cos am(x) = \left(\frac{d^2\cos am(x)}{dx^2}\right)_0 \frac{x^2}{1.2} + \left(\frac{d^4\cos am(x)}{dx^4}\right)_0 \frac{x^4}{1.2.3.4} + ...$$

ou equivalentemente

$\cos am(x) = 1 - \frac{1}{1.2}x^2 + \frac{1+4k^2}{1.2.3.4}x^4...$, para valores do módulo inferiores a K_1. Esta fórmula é obtida facilmente a partir da relação $\sin^2 amx + \cos^2 amx = 1$.

Tal como concluiu para o seno, Zeferino vai constatar que, se $k=0$ obtém o desenvolvimento do co-seno no arco.

Para a função $\Delta am(x)$ Zeferino apresenta, apenas, o resultado final:

$\Delta am(x) = 1 - \frac{k^2}{1.2}x^2 + \frac{k^2\ \ 4+k^2}{1.2.3.4}x^4...$, com valores do módulo inferiores a K_1. O desenvolvimento anterior é obtido, facilmente, a partir da fórmula $k^2\sin^2 amx + \Delta^2 amx = 1$.

Zeferino chega ainda à conclusão que, a partir das séries anteriores se poderiam obter outras, por exemplo, sendo $dam(x) = \Delta am(x)dx$ obtém-se, por integração, a seguinte expressão:

$$am(x) = x - \frac{k^2}{1.2.3}x^3 + \frac{k^2\ \ 4+k^2}{1.2.3.4.5}x^5\ldots..$$

Fica deste modo apresentado o método de Hermite (1822-1901), passando a descrever o método de Weierstrass[66] (1815-1897), método este que representa as funções $\sin am(x),\quad \cos am(x)$ e $\Delta am(x)$, em expressões fraccionárias, cujos termos são séries em x e k^2, que convergem rapidamente para valores reais ou complexos destas duas variáveis[67].

Para descrever o método de Weierstrass A. Zeferino começa por considerar:

$$\sin am(x) = \frac{e^p}{e^s}; \qquad \cos am(x) = \frac{e^q}{e^s} \qquad \text{e} \qquad \Delta am(x) = \frac{e^r}{e^s}$$

sendo, *p*, *q*, *r* e *s* dados pelas expressões[68]:

$$p = a + bx - \int_x^k dx \int_x^k \frac{dx}{\sin^2 am(x)}, \text{ com } a = (K-E)K - G \text{ e } b = -(K-E)$$

$$q = -\int_0^x dx \int_0^x \frac{\Delta^2 am(x)}{\cos^2 am(x)}dx,$$

$$r = -\int_0^x dx \int_0^x \frac{k^2 \cos^2 am(x)}{\Delta^2 am(x)}dx \text{ e}$$

$$s = -\int_0^x dx \int_0^x k^2 \sin^2 am(x)dx.$$

Atendendo a que

$$\sin am(x) = x - \frac{1+k^2}{1.2.3}x^3\ldots$$

tem-se

$$\sin^2 am(x) = x^2 - \frac{1+k^2}{3}x^4 + \frac{2+13k^2+2k^4}{5.9}x^6\ldots,$$

multiplicando, a igualdade anterior, por k^2 e fazendo duas integrações, vem

$$s = -\frac{k^2}{3\cdot 4}x^4 + \frac{k^2+k^4}{3\cdot 5\cdot 6}x^6 - \frac{2k^2+13k^4+2k^6}{5\cdot 7\cdot 8\cdot 9}x^8\ldots.$$

Como:

$$e^s = 1 + \frac{s}{1} + \frac{s^2}{1\cdot 2} + \frac{s^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$$

ter-se-á

$$e^s = 1 - \frac{k^2}{3\cdot 4}x^4 + \frac{k^2+k^4}{3\cdot 5\cdot 6}x^6 - \frac{8k^2+17k^4+8k^6}{4\cdot 5\cdot 7\cdot 8\cdot 9}x^8 \ldots$$

Da igualdade precedente, deduzem-se imediatamente e^p, e^q e e^r. Para o efeito, bastará multiplicar e^s pelos desenvolvimentos de $\sin am(x)$, $\cos am(x)$ e $\Delta am(x)$. Assim, obtém-se:

$$e^p = x - \frac{1+k^2}{1.2.3}x^3 + \frac{1+4k^2+k^4}{1.2.3.4.5}x^5 - \frac{1+9(k^2+k^4)+k^6}{1.2.3.4.5.6.7}x^7 + \ldots$$

$$e^q = 1 - \frac{1}{1.2}x^2 + \frac{1+2k^2}{1.2.3.4}x^4 - \frac{1+6k^2+8k^4}{1.2.3.4.5.6}x^6 + \frac{1+12k^2+60k^4+32k^6}{1.2.3.4.5.6.7.8}x^8 \ldots$$

$$e^r = 1 - \frac{k^2}{1.2}x^2 + \frac{2k^2+k^4}{1.2.3.4}x^4 - \frac{8k^2+6k^4+k^6}{1.2.3.4.5.6}x^6 + \frac{32k^2+60k^4+12k^6+k^8}{1.2.3.4.5.6.7.8}x^8 - \ldots$$

De acordo com os resultados obtidos anteriormente, Zeferino vai deduzir que:

$$\sin am(x) = \frac{x - A_3x^3 + A_5x^5 - A_7x^7 + \ldots}{1 - M_4x^4 + M_6x^6 - M_8x^8 + \ldots},$$

$$\cos am(x) = \frac{1 - B_3x^3 + B_5x^5 - B_7x^7 + \ldots}{1 - M_4x^4 + M_6x^6 - M_8x^8 + \ldots},$$

$$\Delta\, am(x) = \frac{1 - C_3x^3 + C_5x^5 - C_7x^7 + \ldots}{1 - M_4x^4 + M_6x^6 - M_8x^8 + \ldots},$$

sendo A_3, A_5, A_7, etc…, B_3, B_5, B_7, etc… , C_3, C_5, C_7, etc… e M_3, M_5, M_7, etc…,os coeficientes dos termos, das fórmulas anteriores.

Sabendo que as séries e^p e e^q e e^r foram designadas por Weierstrass da seguinte forma[69]:

$$e^s = Al(x); \quad e^p = Al(x)_1; \quad e^q = Al(x)_2; \quad e^r = Al(x)_3$$

ter-se-á:

$$\sin am(x) = \frac{Al(x)_1}{Al(x)} \qquad \cos am(x) = \frac{Al(x)_2}{Al(x)} \qquad \Delta am(x) = \frac{Al(x)_3}{Al(x)}$$

Para terminar o seu trabalho, Zeferino apresenta ainda um outro método criado a partir dos trabalhos de Jacobi (1804-1851) e Abel (1802-1829) e que, mais tarde, terá sido aperfeiçoado por alguns analistas, entre os quais Schloemilch. Neste método as funções são representadas por séries periódicas. Estas séries vão-nos permitir observar que as Funções Elípticas, de todas as espécies, se vão reduzir a uma única função transcendente que é a função Θ, que se deve a Jacobi e que já foi referida durante este trabalho[70].

Assim, da igualdade:

$$e^{-\frac{\pi K_1}{K}} = q,$$

obtém-se:

$$\sin am\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x...}{1-2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x...}$$

$$\cos am\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x...}{1-2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x...}$$

$$\Delta\, am\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \sqrt{k'}\,\frac{1+2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x...}{1-2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x...}.$$

Considerando

$$\frac{2Kx}{\pi} = u \Leftrightarrow x = \frac{\pi u}{2K},$$

tem-se

$$\Theta(u) = 1 - 2q\cos\frac{\pi u}{2K} + 2q^4\cos\frac{2\pi u}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi u}{K} + ...$$

$$H(u) = 2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi u}{2K} - 2\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi u}{2K} + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin\frac{5\pi u}{2K}...,$$

donde resulta:

$$\sin am(u) = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{H(u)}{\Theta(u)};\quad \cos am(u) = \sqrt{\frac{k}{k'}}\,\frac{H(u)}{\Theta(u)} \ \text{ e } \ \Delta\, am(u) = \sqrt{k'}\,\frac{H(u)}{\Theta(u)}.$$

Antes de terminar, A. Zeferino chama a atenção que a partir de

$$k\ H(u)^{\ 2} + k'\ \Theta(u+k)^{\ 2} = \ \Theta(u)^{\ 2} \Leftrightarrow H(u) = \sqrt{\frac{\Theta(u)^{\ 2} - k'\ \Theta(u+k)^{\ 2}}{k}}$$

se deduz, facilmente, que as funções de 1ª espécie $\sin am(x)$, $\cos am(x)$ e $\Delta am(x)$ dependem unicamente da função Θ. Schloemilch calcula ainda os valores particulares de $\Theta(0)$ e $\Theta(K)$, seguidos de um exemplo.

Neste último capítulo, mais do que em qualquer um dos outros, Zeferino limita-se a apresentar resultados finais.

Em comparação com *"Théorie des Intégrales et des Fonctions Elliptiques"* tivemos, oportunidade de verificar que, ao contrário de Zeferino, nesta obra se encontra um desenvolvimento minucioso, de todos os conteúdos abordados pelo matemático português.

Oskar Schloemilch ainda aborda, para além de outros já citados, os seguintes temas: "Funções Theta", "Séries periódicas e séries de fracções elípticas simples" e "Séries periódicas para funções elípticas compostas. Produtos infinitos", não sendo estes referidos durante a obra de Zeferino.

Em *"Théorie des Intégrales et des Fonctions Elliptiques"* poder-se-á, ainda, tomar contacto com o estudo das Funções Elípticas de segunda e terceira espécie.

Ainda, no que diz respeito à obra do analista alemão, esta oferece um desenvolvimento minucioso do tema em estudo, Integrais e Funções Elípticas. Por outro lado, Schloemilch teve a preocupação de apresentar, sempre que possível, exemplos, que nos permitissem por um lado, ver a utilidade prática dos Integrais e Funções Elípticas e por outro uma obter uma melhor compreensão dos conceitos por ele abordados.

A tradução desta obra trouxe uma mais valia, uma vez que foram deixadas notas, por parte do tradutor, algumas das quais conclusões que o próprio Schloemilch omite.

Poder-se-á concluir que Zeferino embora muito mais pudesse ter dito, o certo é que mostrou o essencial, para a compreensão, da teoria dos Integrais e Funções Elípticas. O matemático português teve a preocupação de apresentar, de uma forma exaustiva, o fundamental das Funções Elípticas, a dupla periodicidade. Poder-se-á, deste modo, considerar que o seu trabalho, embora não tenha apresentado aspectos inovadores, foi consistente e conciso.

Notas

[1] Cf. Notas, p.19.

[2] Oskar Xavier Schloemilch nasceu a 17 de Abril de 1823 em França e faleceu a 7 de Fevereiro de 1901. As técnicas da análise de Cauchy (1789-1857) tornam-se conhecidas, na Alemanha, através dos seus trabalhos. Em 1847 deu uma fórmula geral para o resto da Fórmula de Taylor. Dez anos depois, 1857, descobriu uma importante expansão em série de uma função arbitrária, em termos das funções de Bessel.

[3] Cf. Notas, p.19.

[4] Durante esta, bem como em todo o seu trabalho, A. Zeferino designa as variáveis complexas, números complexos e funções complexas por variáveis imaginárias, números imaginários e funções imaginárias, respectivamente.

[5] Zeferino nunca refere esta igualdade.

[6] Nesta descrição podemos encontrar a palavra complexa, sendo talvez uma das únicas situações, se não a única, em que tal se verifica.

[7] Sendo $z = x + iy$, se $x = 0$ e $y \neq 0$ diz-se que o número é um imaginário puro; se $y = 0$ e $x \neq 0$ diz-se que o número é, naturalmente, real.

[8] Também poderá ser escrito da seguinte forma: $z = \rho cis\varphi$.

[9] Zeferino designa-o por "ângulo vector".

[10] Cf. p36.

[11] Segundo a notação de Cauchy (1789-1857). Segundo Liouville (1809-1899) – bem determinada e segundo Hermite (1822-1901) – uniforme. Este termo, «função monodroma», foi introduzido por Cauchy aquando da necessidade de subdividir a classe das funções analíticas. No entanto, este já está fora de uso.

[12] Segundo a notação de Cauchy (1789-1857). Segundo Liouville (1809-1899) – mal determinada ou mal definida e segundo Hermite (1822-1901) – não uniforme.

[13] Monodromas – racionais, exponenciais e trigonométricas.
Ambíguas – Irracionais e logaritmicas.

[14] Equações a que A. Zeferino não faz referência.
As equações de Cauchy-Riemann poder-se-ão escrever em coordenadas polares, da seguinte forma: $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$ e $\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$. Estas equações já tinham sido usadas por Lagrange (1765-1843) e D'Alembert (1717-1783), por volta de 1750, aquando das suas investigações em hidrodinâmica.

[15] A expressão $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ é designada de operador de Laplace.

[16] A "condição (2)" referida na citação são as Equações de Cauchy –Riemann.

[17] Zeferino designa de Função "Synéctica".
Actualmente a palavra «holomorfa» é muitas vezes utilizada como sinónimo de analítica.

[18] Cf. p.38.

[19] A integração das funções de variável real faz-se em "intervalos"; a de funções de variável complexa faz-se "ao longo de caminhos".
<u>Caminho</u> (ou contorno) uma aplicação seccionalmente contínua $\gamma: \ a,b \ \subset \square \to \square$.

[20] Graindorge, na sua obra, refere que as notações de d e δ conservam as mesmas definições que no caso das funções reais de variável real.

[21] Definição: Sendo *a* a única singularidade de uma função *f* existente no disco de centro *a* e raio *r*, podemos escrever: $f(z) = ... + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + ...$, para $0 < |z-a| < r$, com os coeficientes calculáveis pela fórmula $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw$, onde C é uma circunferência de centro ***a*** e raio <1.
Ao coeficiente a_{-1}, do desenvolvimento da série de Laurent (1813-1854), chama-se <u>Resíduo</u> de *f* em relação a *a*, $a_{-1} = \operatorname{Re}s(f;a)$.

[22] Definição: O <u>Índice</u> de um ponto *a* relativamente à curva γ é dado por: $n \ \gamma,a \ = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$.

[23] Apenas faz referência que esta se encontra no livro *"La théorie des fonctions doublement périodiques"* de Briot (1817-1842) e Bouquet (1819-1885).

[24] São chamados de Elípticos porque a rectificação da elipse depende de um integral deste tipo.

[25] Foi a usada por Legendre (1752-1833), segundo indicação de Harris Hancock (1867-1944). ([**A34**], p.10)

[26] Numa equação do 2º grau do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ chama-se <u>binómio discriminante</u> a $\Delta = b^2 - 4ac$, que nos permite determinar o número de raízes da equação. Assim, se $\Delta > 0$ -a equação tem duas soluções reais; se $\Delta = 0$ a equação tem uma raiz (dupla) real e se $\Delta < 0$ não tem raízes reais.

[27] $F(x)$ é uma função par se $F(x) = F(-x)$ qualquer que seja o valor de *x* pertencente ao domínio.

[28] A. Zeferino diz que vai multiplicar a fracção pelo denominador.

[29] Exprimem-se em potências, logaritmos e arcos de círculo.

[30] Formas já apresentadas durante a segunda parte do segundo capítulo deste trabalho.

[31] A. Zeferino escreve funções de terceira espécie.

[32] John Landen nasceu a 23 de Janeiro de 1719 em Inglaterra e faleceu a 15 de Janeiro de 1790 em Inglaterra.

Landen nunca foi um matemático profissional, encarava a matemática, apenas, como uma actividade de lazer.
As funções Beta e Gama, inventadas por Euler (1707-1783), são por ele estudadas, mas só com a explicação dos métodos de redução e integração.
Landen estudou os Integrais Elípticos, de uma forma superficial. Este estudo foi apresentado por, em 1775, na sua obra *Philosophical Transactions* , onde se encontra a explicação de Landen sobre a relação existente entre os arcos da hipérbole e da elipse.

[33] Provavelmente houve erro de redacção e Zeferino teria querido dizer: "decrescimento continuado dos módulos e aumento das amplitudes"

[34] Esta conclusão não é referida por A. Zeferino.

[35] Ver Anexo VII – Resolução do Exemplo.

[36] Cf. p.53.

[37] A. Zeferino faz ainda referência à obra de Legendre (1752-1833), sobre Funções Elípticas, onde se encontram inúmeras propriedades dos integrais de terceira espécie, os quais na maioria dos casos são conhecidos a partir dos integrais de primeira e segunda espécie.

[38] A. Zeferino refere que estas não serão demonstradas porque dariam ao seu trabalho uma maior complexidade, o que não era objectivo do mesmo.

[39] Segundo o autor encontra-se no livro de Francoeur, 4ª parte, nº 190.

[40] Esta igualdade verifica-se porque $\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$.

[41] Cf. p.58.

[42] Integração por partes do primeiro integral.

[43] Integração por partes do segundo integral.

[44] As fórmulas que aparecem na citação são as **(11)**, **(12)** e **(6)**, respectivamente do presente trabalho.

[45] Esta demonstração é mais actual (ver [**A31**])

[46] Zeferino não faz esta referência.

[47] Adição, subtracção, multiplicação e divisão.

[48] Por exemplo: $\arcsin z = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ e $\arctan z = \int_0^z \frac{dz}{1+z^2}$, considerando $\arcsin z = u$ e $\arctan z = u$, obter-se-á $z = \sin u$ e $z = \tan u$.

[49] Lê-se "φ igual à amplitude de u e k".

[50] Zeferino escreve $u = F(1,\varphi) = \mathrm{l}tg\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\varphi\right)$.

[51] Todo o Integral Elíptico de primeira espécie pode exprimir-se num outro da mesma espécie, mas de módulo maior e amplitude menor e vice-versa.

[52] A. Zeferino escreve $\alpha = arc\ \ tg = \sqrt{1-k^2}$.

[53] A. Zeferino escreve "(…), se acham sobre uma recta , passando pela origem das coordenadas".

[54] As notações amu, $\sin amu$, $\cos amu$ e Δamu, foram dadas por Jacobi (1804-1851). No entanto podem ser encontradas outras notações. Por exemplo, Briot (1817-1842) e Bouquet (1819-1885) designam as três funções elípticas por λ,μ,ν; Schellbach (1805-1892) utilizou as letras f,g,h e finalmente Gudermann (1798-1851), adoptou snu, cnu e dnu. Refira-se que Gudermann foi professor de Weierstrass (1815-1897).

[55] Cf. p.71.

[56] Cf. p.41.

[57] A. Zeferino já tinha feito referência a este integral durante a introdução da sua dissertação.

[58] Este integral corresponde ao valor de $\int f(z)dz$ referente ao caminho que começa em A e envolve sucessivamente os pontos B_1 e C_1. O integral $F-G$ apresenta aquela forma, depois de se ter considerado $r=0$, nos integrais circulares.

[59] Cf. p.74.

[60] Legendre (1752-1833) chamou a k e k_1 módulos complementares porque, $k^2+k_1^2=1$.

[61] A. Zeferino escreve $OA=4K$ e $OC=2K_1$ omitindo, mais uma vez, a notação de medida de comprimento de um segmento de recta.

[62] O autor escreve: "linhas".

[63] De facto, o círculo trigonométrico está dividido em quatro partes, quatro quadrantes. Sendo a função seno positiva nos primeiro e segundo quadrantes e negativa nos outros dois.

[64] Relacionadas com a função exponencial definem-se outras funções importantes, pelas fórmulas de Euler (1707-1783), que são expressas como combinações lineares de exponenciais.

O co-seno hiperbólico $$chz = \frac{e^z+e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

O seno hiperbólico $$shz = \frac{e^z-e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

O co-seno circular $$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

O seno circular $$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

[65] A fórmula de MacLaurin (1698-1746) é um caso particular da fórmula de Taylor (1685-1731). Se uma função *f tem n* derivadas para $x=0$, então em alguma vizinhança *U*, desse ponto, *f* pode ser representada na forma: $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + r_n(x)$, onde $x \in U$ e $r_n(x)$, é o resto do termo de ordem *n*.

Se a função *f(z)* é analítica no ponto zero, então pode ser expressa como uma série de potências em torno de zero, neste caso, temos a série de MacLaurin: $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k$.

[66] Karl Theodor Weierstrass nasceu a 31 de Outubro de 1815 em Ostenfelde, Baviera e faleceu a 19 de Fevereiro de 1897 em Berlim, Alemanha. Este matemático ficou conhecido pela construção das funções complexas por meio de séries de potências. Como o pai não queria que estudasse matemática, fazia-o sozinho. Começou por ler: *"Méchanique celeste"* de Laplace (1749-1827) e, mais tarde, o trabalho de Jacobi (1804-1851) sobre Funções Elípticas.

Depois de muitos conflitos, iniciou os seus estudos matemáticos em 1839. Em 1841 já Weierstrass tinha feito as provas orais, para ascender a professor. No entanto, até esta data, nada tinha publicado. Em 1841 e 1842 publicou três curtos artigos.

Em 1854, publica *"Zur Theorie der Abelschen Functionen"*, no "Jornal de Crelle", obtendo nesse mesmo ano o grau de doutor.

Publicou, em 1856, *"Theorie der Abelschen Functionen"*, uma versão completa sobre a teoria dos integrais hiperelípticos.

A teoria dos números reais foi iniciada, em 1863/64, na sua cadeira: "A teoria geral das funções analíticas". Nas suas aulas provou, o que Gauss não tinha conseguido provar, que os números complexos são a única extensão algébrica comutativa dos números reais. Estudou ainda as funções inteiras, a noção de convergência uniforme e as funções definidas por produtos infinitos. Weierstrass ficou conhecido como o pai da análise moderna.

[67] Zeferino designa-as de"quantidades".

[68] A dedução destas poderá ser encontrada em [**A31**], pp. 134-136.

[69] Funções Abelianas, por terem sido previstas por Abel (1802-1829).

[70] Cf. Cap 1, p.10.

Conclusão

O estudo desta tese incidiu, essencialmente, sobre os Integrais e Funções Elípticas a sua história e a forma como foram divulgadas em Portugal.

No primeiro capítulo foi feita uma abordagem histórica através da qual podemos concluir que os Integrais e as Funções Elípticas constituíam já objecto de estudo durante o século XVII. Após um período de alguma estagnação, que corresponde *grosso modo* ao século XVIII, ter-se-á dado no século XIX o grande desenvolvimento nos estudos em torno deste tema.

Para além desta abordagem histórica, e para uma melhor contextualização e compreensão da matemática feita em Portugal no século XIX, foram analisadas, no segundo capítulo, a vida e obra de António Zeferino Cândido da Piedade bem como a vida universitária da sua época.

No último capítulo foca-se, em particular, a obra *"Integraes e Funcções Ellipticas"* do referido autor permitindo, primeiramente, dar a conhecer a forma como foi feita em Portugal a divulgação do tema e dos conceitos a ele associados. Finalmente, e ainda no capítulo três, tem lugar uma reflexão sobre a forma como A. Zeferino abordou as Funções de Variável Complexa, os conceitos relativos aos Integrais Elípticos e às Funções Elípticas.

Ao longo de toda a exposição anterior, sustentada por diversas observações a propósito, é possível verificar que Zeferino não apresentou aspectos inovadores na sua obra apesar de se poder constatar que se encontrava a par da melhor matemática feita naquela época. É ainda possível observar que o seu trabalho se inspirou na tradução do livro do autor alemão Oskar Schloemilch[1] (1823-1901) sobre esta mesma teoria. Refira-se, a propósito, que a Alemanha, no século XIX, apresentava uma grande potência no que se refere à matemática, tal como afirma Carl B. Boyer

> " Pelos meados do século dezenove os matemáticos alemães estavam de cabeça e ombros acima dos de outras nacionalidades no que referia à análise e à geometria com as universidades de Berlim e Göttingen na liderança e com a publicação centrada no Journal de Crelle[2]".([**A18**], p.424)

De facto, a Alemanha terá assumido, a partir de meados deste século, uma posição de liderança na pesquisa no domínio da Matemática que, até essa altura, era assumida pelos estudiosos franceses. Aliás, de acordo com J.Graindorge, o único trabalho publicado sobre esta matéria, na altura, em França terá sido *"Théorie des fonctions doublement périodiques"* de Briot (1817-1882) e Bouquet (1819-1885)[3], que o terão reformulado dando-lhe o nome de *"Théorie des Fonctions Elliptiques"*, publicado no mesmo ano que A. Zeferino apresentou a sua tese.

Entretanto, na Alemanha, pelo contrário, verificou-se uma proliferação de publicações sobre esta matéria das quais se salientam nomes como: Eiseinstein[4] (1823-1852), H.Schwarz[5] (1843-1921), Durége[6] (1821-1893) Tikhomandritskii[7] (1814-1921) e Schloemilch, Muitos destes trabalhos foram traduzidos para outros idiomas e o de Schloemilch não foi, como já vimos, excepção, sendo considerado por J. Graindorge como o melhor para a compreensão desta teoria. Esta terá sido, talvez, a razão para que António Zeferino se inspirasse na obra daquele autor.

Deste modo, foi possível concluir que os matemáticos em Portugal se encontravam a par de todo o desenvolvimento da matemática no estrangeiro e Zeferino, provavelmente, o primeiro a publicar algo sobre este assunto, confirma precisamente esta actualização, sobre o tema, ao utilizar um livro muito actual relativamente à teoria das Integrais e Funções Elípticas. No entanto, A. Zeferino faz ainda muito uso da obra de Cauchy[8] (1789-1857), na época um pouco ultrapassada, sobretudo no que diz respeito à Análise Complexa.

Após uma leitura atenta da obra de Zeferino é, contudo, possível concluir que este autor conseguiu, através da sua dissertação, transmitir as noções básicas de toda a Teoria dos Integrais e Funções Elípticas. António Zeferino terá dado assim um contributo valioso para o estudo dos Integrais e Funções Elípticas, já que, mais tarde, foram publicados em Portugal outros trabalhos sobre o tema ou com ele relacionados. Tome-se como exemplo o Jornal de Ciências Matemáticas e Astronómicas, mas saliente-se o trabalho de José Pedro Teixeira[9] (1857-1925) que publicou também o *"Estudo sobre Funções Duplamente Periódicas de Primeira e de Segunda Espécie"* (1888), seguindo-se *"Estudo sobre Funções Duplamente Periódicas de Terceira Espécie"* (1889). Refira-se ainda o trabalho de Henrique Manuel de Figueiredo[10] (1861-1922) -*"Superfícies de Riemann"* (1887) que, tal como António Zeferino, também teve como fonte de inspiração livros de autores alemães, chegando mesmo a utilizar termos técnicos alemães.

.

Não podemos, desta forma, deixar de valorizar o trabalho desenvolvido por António Zeferino Cândido da Piedade e o legado valioso que constituiu para o desenvolvimento da Matemática em Portugal.

Notas

[1] Cf. Notas, p.87

[2] O *Journal de Crelle*, foi um dos periódicos especificamente matemáticos que foram característica do séc. XIX. Antes de 1794 havia revistas científicas, mas nenhuma dedicada essencialmente à matemática séria.

A iniciativa para a fundação de periódicos matemáticos surge na Escola Politécnica quando esta começou a publicar o seu jornal. Pouco depois, em 1810, foi fundado Annales de Mathématiques Purés et Appliquées, editado por Joseph Diaz Gergonne (1771-1859).

Na Alemanha, um periódico semelhante, foi iniciado por August Leopold Crelle (1780-1855) sob o título *Journal für die reine und angewandte Mathematik*.

Os Annales de Gergonne não duraram muito, aparecendo em 1836 um periódico francês semelhante ao de Crelle – *Journnal de Mathématiques Purés et Appliqués*, fundado por Liouville (1809-1899).

[3] Cf. Notas, p.19**.**

[4] Ferdinand Gotthold Max Eisenstein nasceu a 16 de Abril de 1823 em Berlim e faleceu na mesma cidade a 11 de Outubro de 1852. Contribuiu para o desenvolvimento de algumas áreas da matemática. Trabalhou na teoria das formas quadráticas com o objectivo de generalizar os resultados obtidos por Gauss (1777-1855) em "*Disquisitiones arithmeticae*", trabalhou ainda, na lei da reciprocidade quadrática. Eisenstein entre 1846 e 1847 estudou as Funções Elípticas, aplicando a soma de séries convergentes.

Depois de meados de 1840, Eisenstein escreve *"Mathematische Abhandlungen besonders aus dem Gebiete der höheren Arithmetik und der Elliptischen Funktionen"*. Este trabalho foi usado por Weierstrass na teoria das Funções Elípticas.

[5] Publicou *"Formeln und Aufzeichungen des Herrn K. Weierstrass…"* (1883). Nesta obra, nota-se a influência de Weierstrass (1818-1897).

[6] Publicou, no campo dos Integrais e Funções a seguinte obra: *"Theorie der elliptischen Funktionen"*(Zürich 1861).

[7] Tikhomandritskii foi professor em Khar'kov e autor de várias monografias, tais como *"Inversão das Funções Elípticas"* (1885), *"Teoria sobre Integrais Elípticos e Funções Elípticas"* (1895) e *"Fundamentos sobre a Teoria dos Integrais Abelianos"* (1895) sendo este último publicado em francês em 1911.

[8] **C**f. Notas, p.19.

[9] José Pedro Teixeira nasceu em Condeixa, Coimbra em 13 de Julho de 1857 e faleceu na mesma vila em 23 de Agosto de 1925.

A Dissertação Inaugural *"Estudo sobre Funções Duplamente Periódicas de Primeira e de Segunda Espécie"*, permitiu-lhe em 1888 obter o grau de doutor em Ciências Matemáticas pela Universidade de Coimbra.

A Dissertação intitulada *"Estudo sobre Funções Duplamente Periódicas de Terceira Espécie"*, serviu para concurso a um lugar na Secção de Matemática da Academia Politécnica do Porto, onde em 1891 foi nomeado Lente Substituto.

Em 1895 foi admitido como Sócio Correspondente da Academia das Ciências de Lisboa. Desde 1897 até 1911 José Teixeira regeu a cadeira de Tecnologia Industrial, cessando a sua carreira como docente leccionando Electrotecnia (domínio no qual tem algumas publicações), na Faculdade da Universidade do Porto.

[10] Henrique Manuel de Figueiredo, nasceu a 13 de Agosto de 1861 em Coimbra e faleceu na mesma cidade a 24 de Fevereiro de 1922.

Em 1879, com 18 anos entra para a Universidade de Coimbra, obtendo em 1883 o Bacharelato em Matemática.

Foi membro do Instituto de Coimbra e em 1886 obteve, a Licenciatura e o Doutoramento em Matemática com a tese *"Superfícies de Riemann"*. Em 1888 publica *Curvas "Algébricas Planas"*.

Apêndice A

TABELAS COM CINCO CASAS DECIMAIS

Segundo Hancock (1867-1944) em [**A34**] as tabelas seguintes[1] foram obtidas a partir das tabelas, com dez casas decimais, que constam do segundo volume do tratado de Legendre (1752-1833).

A Tabela-I dá-nos o valor dos integrais:

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}} \qquad \text{e} \qquad E=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\phi\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\,.$$

Por exemplo: se $\theta=78^{\circ}30'$, então $K=3.01918$ e $E=1.05024$.

A Tabela-II dá os valores do integral

$$F(k,\phi)=\int_0^{\phi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}}\,.$$

Por exemplo: se $\theta=65^{\circ}$ e $\phi=81^{\circ}$, então $F(k,\phi)=1.94377$.

Por fim, a Tabela-III fornece os valores para o integral

$$E(k,\phi)=\int_0^{\phi}d\phi\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\,.$$

Por exemplo: se $\theta=40^{\circ}$ e $\phi=34^{\circ}$, então $E(k,\phi)=0.57972$.

---

[1] Indicaremos, apenas, as tabelas que contem os valores necessários à compreensão dos exemplos.

I – INTEGRAIS COMPLETOS DE PRIMEIRA E SEGUNDA ESPÉCIE

θ	K	E	θ	K	E	θ	K	E
0°	1.57080	1.57080	50°	1.93558	1.30554	82° 0'	3.36987	1.02784
1	092	068	51	5386	29628	12	9457	670
2	127	032	52	7288	28695	24	3.41994	558
3	187	1.56972	53	9267	27757	36	4601	447
4	271	888	54	2.01327	26815	48	7282	338
5	379	781	55	3472	25868	83 0	3.50042	231
6	511	650	56	5706	24918	12	2884	126
7	668	495	57	8036	23966	24	5814	023
8	849	296	58	2.10466	23013	36	8837	1921
9	1.58054	114	59	3002	22059	48	3.61959	821
10	284	1.55889	60	2.15652	21106	84 0	3.65186	1.01724
11	539	640	61	8421	20154	12	8525	628
12	820	368	62	2.21319	19205	24	3.71984	534
13	1.59125	073	63	4355	18259	36	5572	443
14	457	1.54755	64	7538	17318	48	9298	354
15	814	415	65	2.30879	16383	85 0	3.83174	266
16	1.60198	052	66	4390	15455	12	7211	181
17	608	1.53667	67	8087	14535	24	3.91423	099
18	1.61045	260	68	2.41984	13624	36	5827	018
19	510	1.52831	69	6100	12725	48	4.00437	0940
20	1.62003	380	70° 0'	2.50455	11838	86 0	5276	865
21	523	1.51908	30	2729	11399	12	4.10366	792
22	1.63073	415	71 0	5073	10964	24	5736	721
23	632	1.50901	30	7490	10533	36	4.21416	653
24	1.64260	366	72 0	9982	106	48	7444	588
25	900	1.49811	30	2.62555	09683	87 0	4.33865	526
26	1.65570	237	73 0	5214	265	12	40733	466
27	6272	1.48643	30	7962	8851	24	8115	410
28	7006	029	74 0	2.70807	443	36	56190	356
29	7773	1.47397	30	3752	039	48	64765	306
30	1.68575	1.46746	75 0	6806	7641	88 0	74272	258
31	9411	077	30	9975	248	12	84785	215
32	1.70284	1.45391	76 0	2.83267	6861	24	96542	174
33	1192	44687	30	6691	480	36	5.09876	137
34	2139	43966	77 0	2.90256	106	48	25274	104
35	3125	229	30	3974	5738	89 0	43491	075
36	4150	42476	78 0	7857	378	6	54020	062
37	5217	41707	30	3.01918	024	12	65792	050
38	6326	40924	79 0	6173	4679	18	79140	049
39	7479	126	30	3.10640	4341	24	94550	030
40	1.78677	1.39314	80 0	5339	011	30	6.12778	021
41	9922	38489	12	7288	3882	36	35038	014
42	1.81216	37650	24	9280	754	42	63854	008
43	2560	36800	36	3.21317	628	48	7.04398	004
44	3957	35938	48	3400	503	54	73711	011
45	5407	35064	81 0	5530	379	90	∞	000
46	6915	34181	12	7711	257			
47	8481	33287	24	9945	126			
48	1.90108	32384	36	3.32234	017			
49	1800	31473	48	4580	2900			

II – Integrais Elípticos de Primeira Espécie

ϕ	θ = 50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
46°	0.85515	0.86431	0.87342	0.88213	0.89005	0.89678	0.90193	0.90517	0.90628
47	87614	88601	89585	90529	91390	92224	92687	93042	93163
48	89729	90791	91853	92875	93811	94610	95226	95614	95747
49	91860	93001	94146	95252	96267	97139	0.97810	0.98235	0.98381
50	94008	95232	96465	0.97660	0.98762	0.99711	1.00444	1.00909	1.01068
51	96171	97484	0.98811	1.00102	1.01297	1.02329	03129	03638	03812
52	0.98352	0.99759	1.01185	02578	03872	04995	05868	06425	06616
53	1.00550	1.02055	03587	05089	06491	07711	08665	09274	09483
54	02765	04374	06018	07637	09155	10481	11521	12188	12418
55	04998	06716	08479	10223	11865	13307	14442	15171	15423
56	07248	09082	10971	12848	14624	16190	17430	18229	18505
57	09517	11472	13494	15513	17433	19136	20488	21364	21667
58	11803	13886	16050	18220	20295	22145	23623	24582	24916
59	14108	16325	18638	20970	23212	25223	26837	27890	28257
60	16432	18788	21254	23764	26186	28371	30135	31292	31696
61	18773	21277	23916	26604	29219	31594	33524	34795	35240
62	21134	23792	26606	29490	32314	34897	37008	38407	38899
63	23513	26332	29332	32425	35473	38281	40594	42135	42679
64	25910	28898	32094	35409	38699	41753	44288	45989	46591
65	28326	31491	34893	38443	41994	45316	48098	49977	50645
66	30760	34109	37728	41520	45360	48976	52031	54112	54855
67	33212	36753	40600	44668	48800	52738	56096	58404	59232
68	35683	39423	43510	47860	52317	56606	60303	62868	63794
69	38171	42119	46457	51107	55913	60586	64661	67518	68557
70	40677	44840	49441	54410	59591	64684	69181	72372	73542
71	43200	47587	52463	57768	63352	68905	73877	77450	78771
72	45739	50359	55522	61182	67198	73256	78759	82774	84273
73	48296	53155	58618	64653	71132	77743	83844	88370	90079
74	50867	55974	61750	68180	75155	82371	89146	1.94267	1.96226
75	53455	58817	64918	71763	79269	87145	1.94682	2.00499	2.02759
76	56056	61682	68120	75401	83473	92073	2.00470	07106	09732
77	58672	64569	71356	79094	87768	1.97157	06529	14136	17212
78	61302	67476	74625	82840	92154	2.02403	12878	21644	25280
79	63943	70403	77924	86637	1.96630	07813	19538	29694	34040
80	66597	73347	81253	90484	2.01193	13390	26527	38365	43625
81	69261	76309	84609	94377	05840	19131	33866	47748	54209
82	71935	79286	87991	1.98313	10568	25035	41569	57954	66031
83	74618	82278	91395	2.02290	15371	31097	49648	69109	79422
84	77309	85281	94821	06303	20244	37309	58105	81362	2.94870
85	80006	88296	1.98264	10348	25178	43658	66935	2.94869	3.13130
86	82710	91320	2.01723	14421	30166	50129	76116	3.09782	35467
87	85418	94351	05194	18515	35198	56703	85612	26198	3.64253
88	88129	1.97388	08674	22627	40265	63357	2.95366	44116	4.04813
89	90843	2.00429	12161	26750	45354	70068	3.05304	63279	4.74135
90	1.93558	2.03472	2.15652	2.30879	2.50455	2.76806	3.15339	3.83174	∞

II – Integrais Elípticos de Segunda Espécie

ϕ	θ									
	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
1	0.01745	0.01745	0.01745	0.01745	0.01745	0.01745	0.01745	0.01745	0.01745	0.01745
2	03491	03491	03491	03491	03491	03491	03490	03490	03490	03490
3	05236	05236	05236	05236	05236	05236	05235	05235	05235	05235
4	06981	06981	06981	06981	06981	06980	06980	06979	06979	06978
5	08727	08727	08726	08726	08725	08725	08744	08723	08722	08721
6	10472	10472	10471	10471	10470	10469	10467	10466	10464	10462
7	12217	12217	12216	12215	12214	12212	12210	12207	12205	12202
8	13963	13962	13961	13960	13957	13955	13951	13948	13944	13940
9	15708	15707	15706	15704	15700	15696	15692	15687	15681	15676
10	17453	17453	17451	17447	17443	17438	17431	17427	17417	17409
11	19199	19198	19195	19191	19185	19178	19169	19160	19150	19140
12	20944	20943	20939	20934	20926	20917	20906	20894	20881	20868
13	22689	22688	22683	22676	22667	22655	22641	22626	22609	22593
14	24435	24433	24427	24419	24406	24392	24374	24355	24335	24314
15	26180	26178	26171	26160	26145	26127	26106	26083	26058	26032
16	27925	27923	27914	27901	27883	27861	27836	27807	27777	27746
17	29671	29667	29658	29642	29620	29594	29563	29529	29493	29455
18	31416	31412	31401	31382	31357	31325	31289	31248	31205	31161
19	33161	33157	33143	33121	33092	33055	33012	32965	32914	32862
20	34907	34901	34886	34860	34825	34783	34733	34678	34619	34558
21	36652	36646	36628	36598	36558	36509	36451	36387	36319	36249
22	38397	38390	38370	38336	38290	38233	38167	38094	38015	37934
23	40143	40135	40111	40073	40020	39955	39880	39796	39707	39614
24	41888	41879	41852	41809	41749	41676	41590	41496	41394	41289
25	43633	43623	43593	43544	43477	43394	43298	43191	43076	42958
26	45379	45367	45333	45278	45203	45110	45002	44882	44753	44620
27	47124	47111	47074	47012	46928	46824	46703	46569	46425	46276
28	48869	48855	48813	48745	48651	48536	48402	48252	48092	47926
29	50615	50599	50553	50477	50373	50245	50097	49931	49753	49569
30	52360	52343	52292	52208	52094	51953	51788	51605	51409	51205
31	54105	54086	54030	53938	53813	53657	53476	53275	53059	52834
32	55851	55830	55768	55667	55530	55360	55161	54940	54703	54456
33	57596	57573	57506	57396	57245	57059	56842	56600	56341	56070
34	59341	59317	59243	59123	58959	58756	58520	58256	57972	57677
35	61087	61060	60980	60850	60672	60451	60194	59907	59598	59276
36	62832	62803	62716	62575	62382	62143	61864	61552	61217	60868
37	64577	64546	64452	64300	64091	63832	63530	63193	62830	62451
38	66323	66289	66188	66023	65798	65519	65193	64828	64436	64027
39	68068	68031	67923	67746	67503	67203	66851	66459	66035	65594
40	69813	69774	69658	69467	69207	68884	68506	68084	67628	67153
41	71558	71517	71392	71188	70909	70562	70157	69703	69214	68703
42	73304	73259	73126	72907	72609	72238	71804	71318	70793	70245
43	75049	75001	74859	74626	74307	73910	73446	72927	72365	71778
44	76794	76744	76592	76343	76003	75580	75085	74530	73931	73303
45	0.78540	0.78486	0.78324	0.78059	0.77697	0.77247	0.76720	0.76128	0.75489	0.74819

Bibliografia

Livros

[A1] Ahlfors, L.V., *Analisis de Variable Compleja. Introducción a la teoria de Funciones Analiticas de una variable compleja*. Tradução de A.Pardo Fraile, Madrid, Aguilar, 1971.

[A2] Akhiezer, N.I. *Elements of the Theory of Elliptic Functions*, Translations of Mathematical Monographs, vol.79. United States of America, American Mathematical Society, 1990.

[A3] Almeida, Luíz da Costa e. *A Faculdade de Mathemática da Universidade de Coimbra (1872-1892)*. Coimbra, Imprensa da Universidade, 1892.

[A4] ———. *I - Faculdade de Matemática, Coimbra reforma 1867*. Coimbra, [s.d.].

[A5] Annuário da Universidade de Coimbra no Anno Lectivo de 1867 para 1868, Coimbra, Imprensa da Universidade, 1867.

[A6] Annuário da Universidade de Coimbra no Anno Lectivo de 1868 para 1869, Coimbra, Imprensa da Universidade, 1868.

[A7] Annuário da Universidade de Coimbra no Anno Lectivo de 1869 para 1870, Coimbra, Imprensa da Universidade, 1869.

[A8] Annuário da Universidade de Coimbra no Anno Lectivo de 1870 para 1871, Coimbra, Imprensa da Universidade, 1870.

[A9] Annuário da Universidade de Coimbra no Anno Lectivo de 1871 para 1872, Coimbra, Imprensa da Universidade, 1871.

[A10] Annuário da Universidade de Coimbra no Anno Lectivo de 1872 para 1873, Coimbra, Imprensa da Universidade, 1872.

[A11] Annuário da Universidade de Coimbra no Anno Lectivo de 1873 para 1874, Coimbra, Imprensa da Universidade, 1873.

[A12] Annuário da Universidade de Coimbra no Anno Lectivo de 1874 para 1875, Coimbra, Imprensa da Universidade, 1874.

[A13]Ball, W.W. Rouse. *A Short Account of the History of Mathematics*. St. Martin´s Street, London, MacMillan and CO., Limited, 1919.

[A14] Bell, E.T., *Development of Mathematics*. New York London, Second Edition, McGraw – Hill Book Company, Inc., 1945.

[A15] ——— *Men of Mathematics*, New York, Simon and Schuster, Inc., 1937.

[A16] Birkhoff, Garriett. *A Source Book in Classical Analysis*. Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1973.

[A17] Bowman, F. *Introduction to Elliptic Functions with applications*. London, English Universities Press Ltd., 1953.

[A18] Boyer, Carl B. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide, Editora Edgard Blücher Ltda, 1974.

[A19] ——— *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York Dover Publications, inc., 1959.

[A20] Braga, Theophilo. *História da Universidade de Coimbra, Tomo IV – 1801 a 1872*. Lisboa, Typographia da Academia real das Sciencias, 1902.

[A21] Briot e Bouquet. *Théorie des Fonctions Elliptiques*. Paris, Gauthier-Villars, 1875.

[A22] Caraça, Bento de Jesus. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa, Gradiva, 1998.

[A23] Cayley, Arthur. *An Elementary Treatise on Elliptique Functions*. New York, Dover Publications, Inc., 1895.

[A24] Coelho, Renato Pereira. *Lições de Análise Complexa*, Coimbra, 1987.

[A25] Cunha, Pedro José da. *Bosquejo Histórico das Matemáticas em Portugal*.Lisboa, Imprensa Nacional, 1929.

[A26] Dieudonné, Jean. *Abregé d´histoire des Mathématiques 1700 – 1900.* Paris, Hermann, 1978.

[A27] Duncan, J. *The elements of Complex analysis*. London, New York e Sydney, John Wiley & Sons, 1968

[A28] Encyclopaedia of Mathematicas [managing ed.: M. Hazewinkel].- Dordrecht, Klumer.- Vol.1 – 6. 1995 (CD-ROM 1997).

[A29] Francoeur, L. B. *Curso Completo de Mathematicas Puras. Calculo Differencial-Calculo Integral*. Coimbra, Imprensa da Universidade, 1858.

[A30] Freire, Francisco de Castro. *Memória histórica da FACULDADE DE MATHEMÁTICA nos cem annos decorridos desde a reforma da Universidade em 1772 até ao presente*. Coimbra, Imprensa da Universidade, 1872.

[A31] Graindorge, Joseph. *Théorie des Intégrales et des Fonctions Elliptiques*. Tradução do alemão. Paris, Gauthier-Villars, 1873

[A32] Guimarães, Rodolphe. *Les Mathématiques en Portugal*, Deuxiéme Édition, Coimbre, Imprimiere de L´Université, 1909.

[A33] Guiness, Ivor Grattan. *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*. England, MIT Press, 1970.

[A34] Hancock, Harris. *Elliptic Integrals*, New York, Dover Publications, 1958.

[A35] ———, *Lectures on the Theory of Elliptic Functions*. New York, Dover Publications, 1958.

[A36] Kolmogorov, A.N. e Yushkevich, A.P. *Mathematics of the 19th Century*. Basel · Boston · Berlin, Birkhäuser Verlag, 1996.

[A37] Labourdette, Jean-François. *História de Portugal*. Tradução de Magda Bigotte de Figueiredo. Publicações Dom Quixote, 1986.

[A38] Lang, Serge. *Elliptic Functions***,** Second Edition. New York, Springer-Verlag, 1987.

[A39] Lima, Elon Lages. *Curso de análise volumes 1 e 2*. Rio de Janeiro, Projecto Euclides, 1982.

[A40] Livro de Registos de Nascimentos, Arquivo da Universidade de Coimbra

[A41] Marsden, Jerrold E. e Michael J. Hoffman. *Basic Complex Análisis*. Second Edition, New Cork, W.H. Freeman and Company, 1987.

[A42] Mehrtens, Herbert, *et al eds*. *Social History of Nineteenth Century Mathematics*. Boston · Basel · Stuttgart, Birkhäuser, 1981.

[A43] Oliveira, J. Tiago de. *O essencial sobre a História das Matemáticas em Portugal*. Lisboa, Imprensa Nacional – Casa da Moeda, 1989.

[A44] Piedade, António Zeferino Cândido da. *A Honra de Vasco da Gama*. Rio de Janeiro, Casa Mont´Alverne, 1898.

[A45] ———, *Brazil*. Rio de Janeiro, Imprensa Nacional, 1900.

[A46] ———, *Integraes e Funcções Ellipticas*. Coimbra, Imprensa da Universidade, 1875.

[A47] ———, *O Canhão Vence ... A verdade Convence*. Lisboa, Ferreira, Lda Editores, 1915.

[A48] ———, *Parallaxe Solar. Methodos da sua Determinação*. Coimbra, Imprensa da Universidade, 1877.

[A49] ———, *Portugal*. Rio de Janeiro, Typ. Da Companhia de Loterias Nacionais do Brazil, em Sapopemba, 1898.

[A50] ———, *Resposta ao Questionário da Comissão de Instrução Secundária*. Coimbra, Imprensa da Universidade, 1876.

[A51] Prasolov, Viktor e Yuri Solovyev. *Elliptic Functions and Elliptic Integrals*, Translations of Mathematical Monographs, vol.170. American Mathematical Society, 1997.

[A52] Ríbnikov, K. *História de las Matemáticas*. Tradução de Concepción Valdês Castro, Madrid, Editorial Mir Moscú, 1987.

[A53] Rodrigues, Manuel Augusto. *Memoria Professorvm Vniversitatis Conimbrigensis 1772 – 1937*, Vol II, Coimbra, Arquivo da Universidade de Coimbra, 1992.

[A54] Santos, José Carlos e Coimbra de Matos, *Curso de Análise Complexa*, Lisboa, Escolar Editora, 2000.

[A55] Silva, Jaime Carvalho. *Antologia de textos essenciais sobre a História da Matemática em Portugal*. Lisboa, Sociedade Portuguesa de Matemática, 2000.

[A56] ———, *O Ensino da Matemática na Universidade de Coimbra na segunda metade do séc.* XIX. Universidade de Coimbra, Departamento de Matemática, 1997

[A57] Spiegel, Murray R. *Variáveis Complexas*. Tradução de José Raimundo B. Coelho. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil, Ltda, 1972.

[A58] Struik, Dirk J., *História Concisa das Matemáticas*. Tradução de João Guerreiro, Lisboa, Gradiva, 1992.

[A59] Teixeira, Francisco Gomes. *História das Matemáticas em Portugal*. Lisboa, Academia das Ciências de Lisboa, 1934.

[A60] ———, *Panegíricos e Conferências*, Coimbra, Imprensa da Universidade, 1925.

[A61] Wieleitner, H., *História de la Matemática*. Tradução de Carlos Mendizábal Brunet, Buenos Aires, Editorial Labor,S.A. Barcelona, 1928.

[A62] URL:http://mathworld.wolfram.com.

Jornais

[B1] *A Época*, 1901 – 1909, Director António Zeferino Cândido da Piedade.

[B2] *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronómicas*, Vol I – nº8, Francisco Gomes Teixeira. Coimbra, Imprensa da Universidade, 1877.

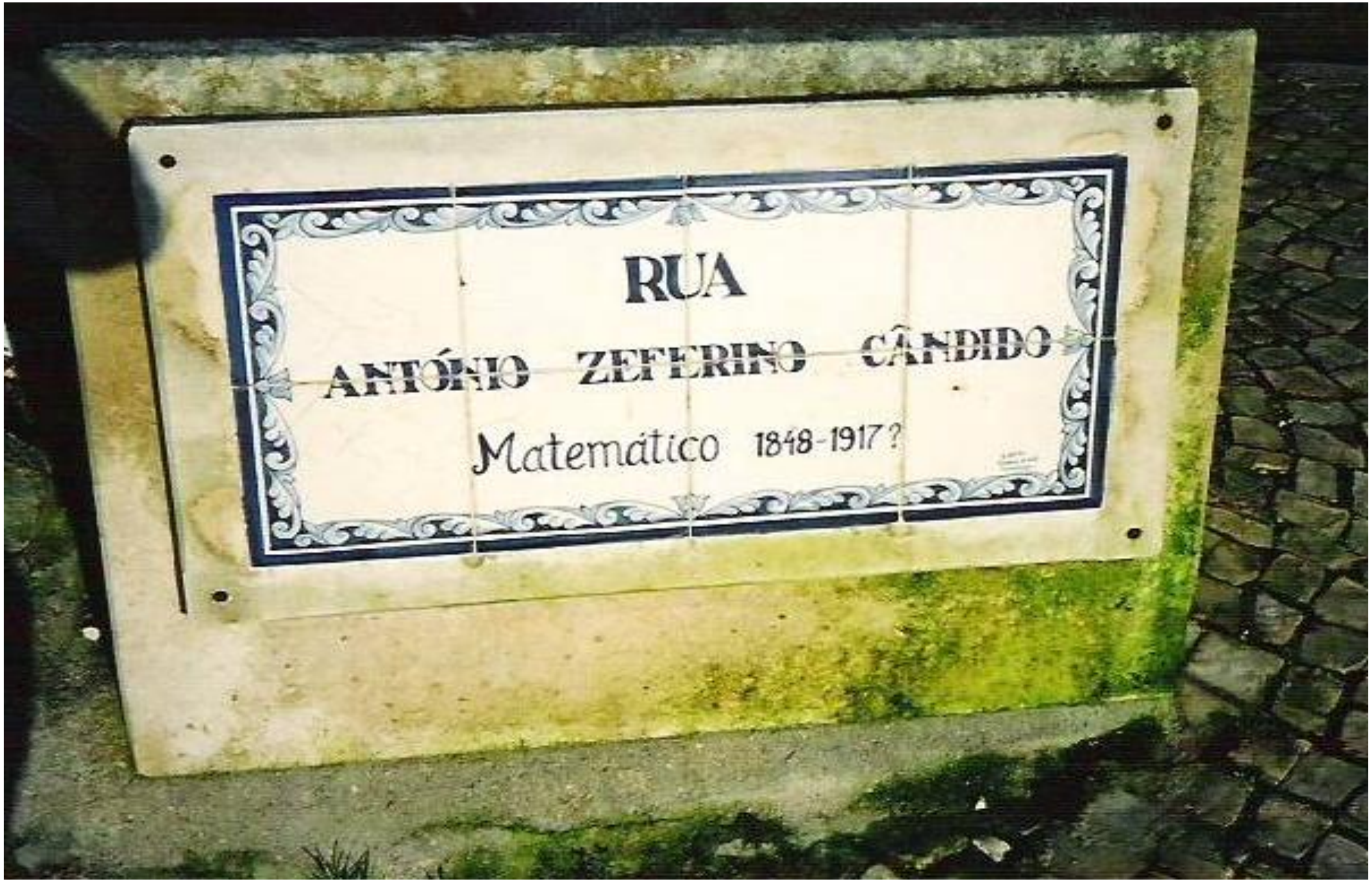
[B3] *O INSTITUTO*, *Jornal Scientifico e Litterário*. Coimbra, Imprensa da Universidade, 1853.

Artigos

[C1] Gray, Jeremy e Eduardo L. Ortiz. On the Transmission of Riemann's Ideas to Portugal, Historia Mathematica, 26 (1999), 52-67.

[C2] URL: www-groups.dcs-and.ac.uk/~history

[C3] *António Zeferino Cândido*,
URL: www.brasil.terravista.pt/magoito/1937/zeferinocandido.html


RUA
ANTÓNIO ZEFERINO CÂNDIDO
Matemático 1848-1917?

Actos grandes e Doutoramentos que tiveram logar no anno lectivo de 1874 a 1875

ACTOS GRANDES				
Nomes	**Faculdades**	**Actos**	**Objecto das dissertações inauguraes**	**Datas**
Francisco Gomes Teixeira	Mathematica	Exame de Licenciado	—	8 de janeiro de 1875
Bernardino Luiz Machado Guimarães	Philosophia	»	—	14 de janeiro de 1875
Antonio José Gonçalves Guimarães	»	»	—	22 de fevereiro de 1875
Manuel d'Arriaga	Direito	»	—	24 de maio de 1875
Antonio d'Assis Teixeira de Magalhães	»	»	—	31 de maio de 1875
Adriano Xavier Lopes Vieira	Medicina	»	—	5 de junho de 1875
Antonio Venancio d'Oliveira David	Philosophia	Acto de conclusões magnas	Geleiras actuaes	12 de junho de 1875
Francisco da Costa Pessoa	Mathematica	»	Existem verdadeiras Nebulosas?	14 de junho de 1875
Antonio Zeferino Candido da Piedade	»	»	Integraes e funcções elipticas	22 de junho de 1875
Francisco Gomes Teixeira	»	»	Integração das equações ás derivadas parciaes de segunda ordem	30 de junho de 1875

DOUTORAMENTOS				
Nomes	**Faculdades**			**Datas**
Antonio Venancio d'Oliveira David	Philosophia	....	....	29 de junho de 1875
Francisco da Costa Pessoa	Mathematica	....	....	11 de julho de 1875
Antonio Zeferino Candido da Piedade	»	....	....	11 de julho de 1875
Francisco Gomes Teixeira	»	....	....	18 de julho de 1875

THESES

DE

MATHEMATICAS PURAS E APPLICADAS

AS QUAES

SOB A PRESIDENCIA

DO

EXCELLENTISSIMO E SAPIENTISSIMO SENHOR

DOUTOR RAYMUNDO VENANCIO RODRIGUES

Commendador da Ordem de Nossa Senhora da Conceição de Villa Viçosa.
Lente de vespera da Faculdade de Mathematica.
etc., etc., etc.

SE PROPÕE DEFENDER

NA

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

PARA OBTER O GRÁU DE DOUTOR.

Antonio Zeferino Candido da Piedade.

Algebra Superior

I

Na eliminação algebrica é preferível o methodo de Kramp

II

Não são rigorosas as demonstrações dadas nos n.os 142 e 143 da 3ª edição portugueza da Algebra superior de Francoeur

Calculo differencial e integral

I

No estudo das funcções ellípticas, preferimos o methodo que se basêa na dupla periodicidade d´estas funcções.

II

Os methodos empregados para distinguir os maximos e os minimos dos integraes simples, contendo uma unica funcção desconhecida e suas derivadas sucessivas, são inapplicaveis na maior parte dos casos.

Geometria descriptiva

I

É insustentavel a opinião de Leroy, exposta no n.º 214 da Geometria Descriptiva, 8ª edição, na parte em que se dá preferencia ao methodo das duas normaes.

II

Acceitamos a opinião de Olivier, relativamente á determinação da natureza d´uma curva no espaço, pelo conhecimento das suas projecções.

Mecanica Racional

I

A inercia da materia é uma hypotese em opposição com os factos da natureza.

II

A determinação theorica das pressões exercidas sobre diversos pontos de apoio de um systema sobre um plano só é possível quando o número d´esses pontos tem limites fixos.

III

As tres equações

$$X\Sigma Y'z' - Y\Sigma X'z' = 0$$
$$Y\Sigma Z'x' - Z\Sigma Y'x' = 0$$
$$Z\Sigma X'y' - X\Sigma Z'y' = 0$$

são improprias para exprimir a condição de poderem muitas forças quaesquer reduzir-se a uma só.

IV

A lei de Galileu é um dos fundamentos da Mecanica racional.

Astronomia

I

O uso dos instrumentos azimuthaes é preferivel ao dos instrumentos meridianos, nos observatórios fixos.

II

Para a determinação da differença de longitude geographica de dois logares no mar, damos a preferencia ao methodo de Littrow.

III

O metodo photographico é o mais vantajoso nas observações da passagem de Venus pelo disco solar.

IV

Acceitamos a theoria exposta por Secchi para explicar a formação das manchas do sol.

Mecanica Celeste

I

As leis de Kepler são a base segura de que derivam os principios fundamentaes da Mecanica Celeste.

II

Os methodos analyticos empregados por Laplace dão a unica solução possível aos problemas dos movimentos dos corpos celestes.

III

Sustentamos a doutrina d´este geometra (Mecanica Celeste, livro 2º) sobre a estabilidade do systema solar.

Geodesia

I

O systema de reguas de microscopios de reticulo micrometrico é preferível ao dos contactos na medição das bases d´uma triangulação.

II

O methodo exposto por Faye para a determinação das longitudes geographicas é muito conveniente na practica da Geodesia.

III

A fórma da terra conhece-se por simples determinações de latkitudes e azimuthos astronomicos com mais precisão do que pelas medidas directas do meridiano e parallelo.

Physica mathematica

I

Achamos indirecto e pouco logico o methodo seguido por Lamé no estabelecimento das equações de equilibrio de elasticidade, numa porção finita d´um meio solido.

II

Temos por verdadeira doutrina exposta por este geometra no n.º 20 da 4ª lição da sua Theoria mathematica da elasticidade dos corpos solidos.

III

A existencia de tres forças elasticas principaes em qualquer ponto d´um meio solido, pode demostrar-se a priori.

IV

Acceitamos para base da theoria mathematica da ElectroDynamica, a lei de Ampére, que exprime a acção mutua de dois elementos de corrente elctrica.

ACTO DE CONCLUSÕES NA FACULDADE DE MATHEMATICA

O Conselho da faculdade de Mathematica resolveu que as Theses para os Licenciados, que se propozerem a receber o grau de Doutor, sejam divididas em cinco secções, pela fórma seguinte:

Disciplinas	Numero de Theses	Cadeiras
Mathematicas puras	6	2 – Algebra superior… — 1.ª Cad. 2 – Calculo integral… — 2.ª Cad. 2 – Geometria descrip. — 4.ª Cad.
Mechanica racional	4	………… — 3.ª Cad.
Astronomia	4	………… — 5.ª Cad.
Mechanica celeste e Geod.	6	3 – Geodesia………… — 6.ª Cad. 3 – Mechanica celeste… — 7.ª Cad.
Physica mathematica	4	………… — 8.ª Cad.

DISTRIBUIÇÃO DAS MATÉRIAS DO CURSO DE MATEMÁTICA
(Apresentada pelo prelado da Universidade a 9 de Outubro de 1861)

PRIMEIRO ANNO

1.ª cadeira – Algebra superior, principio da theoria dos numeros;
Geometria analytica a duas e tres dimensões, theoria das Funções Circulares; Trigonometria espherica.
- Chimica inorganica – Desenho

SEGUNDO ANNO

2.ª cadeira – Calculo differencial e integral; das differenças, directo e inverso; das variações; das probabilidades.
- Physica experimental – Desenho

TERCEIRO ANNO

3.ª cadeira – Mechanica racional e suas applicações ás machinas.
4.ª cadeira – Geometria descriptiva; applicações á stereotomia, á perspectiva e á theoria das sombras.
- Physica dos imponderaveis.
-

QUARTO ANNO

5.ª cadeira – Descripção e uso dos instrumentos opticos, astronomia practica
6.ª cadeira – Physica mathematica; applicações da mechanica ás construcções.
- Botanica.

QUINTO ANNO

7.ª cadeira – Geodesia; topographia; operações cadastraes.
8.ª cadeira – Mechanica celeste.
Mineralogia; geologia e arte de minas.

FACULDADE DE MATHEMATICA

PESSOAL

Lentes effectivos

Lente de Prima Decano e Director da Faculdade

Dr. Abílio Affonso da Silva Monteiro

Cathedraticos

Dr. Joaquim Gonçalves Mamede

Dr. Raymundo Venancio Rodrigues

Dr. Rufino Guerra Osorio

Dr. Jacome Luiz Sarmento de Vasconcellos

Dr. Florencio Mago Barreto Feio

Dr. José Teixeira de Queiroz Almeida de Moraes Sarmento

Dr. Luiz Albano d´Andrade Moraes e Almeida

Substitutos Ordinarios

Dr. Francisco Pereira de Torres Coelho

Dr. António José Teixeira

Dr. José Pereira da Costa Cardoso

Dr. Luiz da Costa e Almeida

Fiscal – Vago

Serve de secretario – Dr. Luiz da Costa e Almeida

Bedel – Francisco Antonio d´Araujo Cerveira e Serra

RESOLUÇÃO DO EXEMPLO[1]

Para $k = \dfrac{24}{25}$, ter-se-á:

$$k = 0,96; \quad k_1 = 0,9997917; \quad k_2 = 0,9999999$$

donde, $k_2 = 1$ (aproximadamente). Se considerar, por outro lado, $\varphi = \dfrac{1}{3}\pi$, obtém-se:

$$\varphi = 60^{\text{o}}\,0'0'';$$

$$2\varphi_1 - \varphi = 56^{\text{o}}\,14'28''30, \qquad \varphi_1 = 58^{\text{o}}\,7'14''15;$$

$$2\varphi_2 - \varphi_1 = 58^{\text{o}}\,6'50'', \qquad \varphi_2 = 58^{\text{o}}\,6'39''57;$$

porque $k_2 = k_3 = ... = 1$, ter-se-á $\varphi_2 = \Phi = 58^{\text{o}}\,6'59''57$.

Por conseguinte:

$$F\left(\frac{24}{25}, \frac{1}{3}\pi\right) = \ln\tan 74^{\text{o}}\,3'19''79.\sqrt{\frac{0,9997917}{0,96}} = 1,278522.$$ [2]

[1] [**31**] p.18.

[2] $F(k,\varphi) = \ln\tan\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\Phi\right)\cdot\sqrt{\frac{k_1 k_2 k_3 ...}{k}}$

INTEGRAES E FUNCÇÕES ELLIPTICAS

DISSERTAÇÃO INAUGURAL

PARA O ACTO

DE

CONCLUSÕES MAGNAS

NA

FACULDADE DE MATHEMATICA

POR

ANTONIO ZEFERINO CANDIDO DA PIEDADE

L'analyse mathématique est la véritable base rationnelle du système entier de nos connaissances positives. Elle constitue la première et la plus parfaite de toutes les sciences fondamentales.

A. COMTE — *Philosophie positive.*

COIMBRA
Imprensa da Universidade
1875

THÉORIE

DES INTÉGRALES

ET

DES FONCTIONS ELLIPTIQUES,

PAR

LE Dr OSKAR SCHLOEMILCH,

Professeur à l'École Polytechnique de Dresde, Membre des Académies de Leipzig, de Stockholm, etc.,
correspondant de la Société Royale des Sciences de Liége, membre de l'Académie Léopoldine, etc.

TRADUIT DE L'ALLEMAND,

ET PRÉCÉDÉ D'UNE INTRODUCTION SUR LA

THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE IMAGINAIRE,

PAR

JOSEPH GRAINDORGE,

Docteur spécial en sciences physico-mathématiques, Répétiteur à l'École des mines de Liége,
Membre de la Société Royale des Sciences de Liége,
Correspondant de la Société Mathématique de Paris, etc.

LIÉGE,
ÉMILE DECQ, Libraire-Éditeur,
Rue de la Régence, 4.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, Impr.-Libraire
de l'École Polytechnique, etc.
Quai des Augustins, 55.

1873.

THÉORIE

DES

FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR

MM. BRIOT ET BOUQUET,

PROFESSEURS À LA FACULTÉ DES SCIENCES,
MAITRES DE CONFÉRENCES À L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

DEUXIÈME ÉDITION.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1875

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Erster Band.

In 4 Heften.

Mit 5 Kupfertafeln.

Berlin.

im Verlage von Duncker und Humblot.

1826.

Inhaltsverzeichnifs
des ersten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik

1. Analysis.

2. Geometrie.

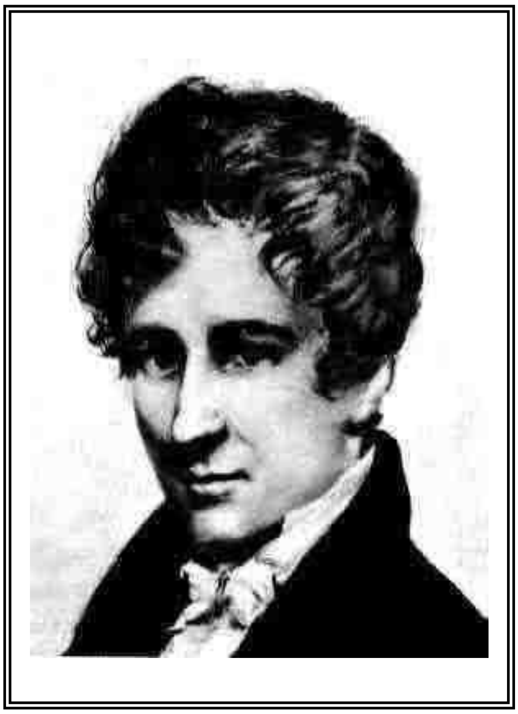
3. Mechanik.

II. Angewandte Mathematik.

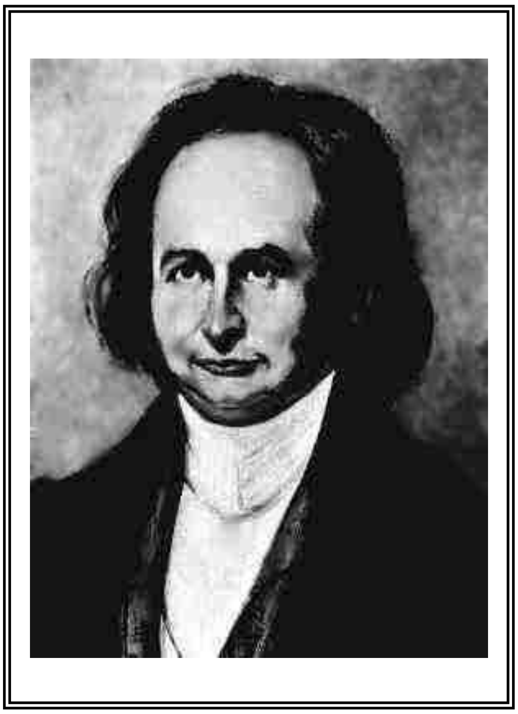
2. Geometrie.

3. Mechanik.

II. Angewandte Mathematik.



NIELS HENRIK ABEL (1802-1829)



CARL GUSTAV J. JACOBI (1804-1851)

CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855)